

Exercice 1 : (3 points)

QCM Trouver la seule bonne réponse :

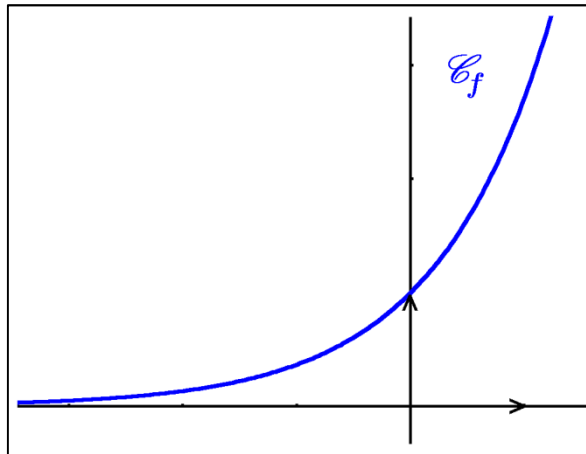
1) Soient (U_n) et (V_n) deux suites tels que : $U_n \geq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$, on a alors :

- Ⓐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ Ⓑ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ Ⓒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

2) Soit (U_n) une suite croissante non majorée, on alors :

- Ⓐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ Ⓑ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ Ⓒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3) Soit la fonction f dont la courbe est la suivante :



Soit la suite (U_n) définie comme suit :
$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

Que peut on dire de la monotonie de (U_n)

- Ⓐ (U_n) est croissante Ⓑ (U_n) est décroissante Ⓒ On ne peut pas conclure

Exercice 2 : (6 points)

Soit U la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n} \end{cases} ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n < 4$

b) Montrer que la suite U est croissante

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite V définie sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 1}$

a) Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver alors la limite de (U_n)

Exercice 3 : (6 points)

On donne les nombre complexes : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$ et $z_3 = -1$

1) Calculer $\left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right|$ et $(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_3)}$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé

a) Placer les points A , B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle

3)a) Vérifier que $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

Exercice 4 : (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

On désigne par A et B les points d'affixes respectives i et $-i$

A tout point M d'affixe z ($z \neq -i$), on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz + 1}{z + i}$

1) Déterminer la forme algébrique de z' lorsque $z = 1 - i$

2)a) Montrer que, pour tout $z \neq -i$, on a : $|z'| = \frac{MA}{MB}$

b) En déduire l'ensemble des points M tel que : $|z'| = 1$

3) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est réel.

Exercice 1 :

1) a) $\boxed{1}$

2) b) $\boxed{1}$

3) a) $\boxed{1}$

Exercice 2 :

1)a) On procède par récurrence, c'est vrai pour $n = 0$ puisque $1 < (U_0 = 2) < 4$, $\boxed{1}$

Supposons que $1 < U_n < 4$,

$$\text{on a donc } \frac{1}{4} < \frac{1}{U_n} < 1 \Leftrightarrow -4 < \frac{-4}{U_n} < \frac{-4}{4} \Leftrightarrow 1 < 5 - \frac{4}{U_n} < 4 \Leftrightarrow 1 < U_{n+1} < 4$$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 5U_n - 4}{U_n} > 0$ car

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$-x^2+5x-4$	$-$	0	$+$	0

d'où $U \nearrow$ $\boxed{1}$

c) U croissante et majorée par 4 donc convergente,

$$\left. \begin{array}{l} U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur } [1,4] \\ U_n \in [1,4] \\ (U_n) \text{ est convergente vers } \ell \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{5\ell - 4}{\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - 5\ell + 4 = 0 \\ \text{d'où } \ell = 4 \text{ ou } \ell = 1 \text{ (à rejeter car } U_n \geq U_0 = 2) \\ \text{ainsi } \lim_{+\infty} U_n = 4 \end{array} \quad \boxed{1}$$

2)a) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 4}{U_{n+1} - 1} = \frac{5U_n - 4 - 4U_n}{5U_n - 4 - U_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_n - 4}{U_n - 1} = \frac{1}{4} V_n$ $\boxed{1}$

b) $V_n = V_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ avec $V_0 = \frac{U_0 - 4}{U_0 - 1} = \frac{2 - 4}{2 - 1} = -2$ $\boxed{0,5}$

$$V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 1} \Leftrightarrow U_n V_n - V_n = U_n - 4 \Leftrightarrow U_n = \frac{-4 + V_n}{V_n - 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{-2 \left(\frac{1}{4}\right)^n - 4}{-2 \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1} \quad \boxed{1}$$

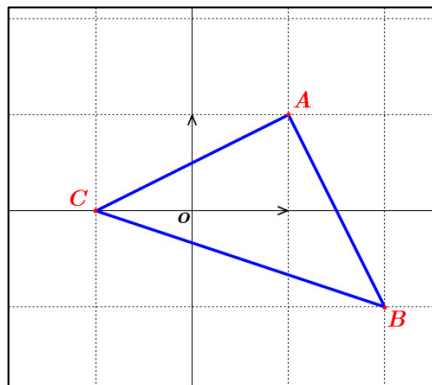
c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{+\infty} U_n = 4$ $\boxed{0,5}$

Exercice 3 :

1) $\left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right| = \left| \frac{-1 + 2i}{2 + i} \right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$; $\boxed{2}$

$$(z_1 - z_2) \overline{(z_1 - z_3)} = (-1 + 2i)(2 - i) = -2 + i + 4i + 2 = 5i$$

2)a) $\boxed{1}$



$$b) AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{5}$$

$$AC = |2 + i| = \sqrt{5} \quad \boxed{1}$$

$$BC = |3 - i| = \sqrt{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ AB = AC \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \text{ est un rectangle isocèle en } A$$

$$3)a) (1 - 2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i \quad \boxed{1}$$

$$b) \Delta = 9 - 4(3 + i) = 9 - 12 - 4i = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$$

$$d'où z_1 = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i \text{ et } z_2 = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i \text{ donc } S_C = \{2 - i, 1 + i\} \quad \boxed{1}$$

Exercice 4 :

$$1) z' = \frac{iz + 1}{z + i} = \frac{i(1 - i) + 1}{1 - i + i} = 2 + i \quad \boxed{1}$$

$$2)a) |z'| = \frac{|i(z - i)|}{|z + i|} = \frac{AM}{BM} \quad \boxed{1}$$

$$b) |z'| = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{Med}[AB] \quad \boxed{1}$$

$$3) z' \text{ est un réel} \Leftrightarrow \bar{z}' = z'$$

$$\Leftrightarrow \overline{\frac{iz + 1}{z + i}} = \frac{iz + 1}{z + i} \Leftrightarrow \frac{-i\bar{z} + 1}{\bar{z} - i} = \frac{iz + 1}{z + i}$$

$$\Leftrightarrow (-i\bar{z} + 1)(z + i) = (iz + 1)(\bar{z} - i)$$

$$\Leftrightarrow -iz\bar{z} + \bar{z} + z + i = iz\bar{z} + z + \bar{z} - i \quad \boxed{2}$$

$$\Leftrightarrow -2i(1 - z\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (1 - z\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Rightarrow OM = 1 \text{ donc } M \in \mathcal{C}_{(O,1)} \setminus \{B\}$$