1) PRODUIT SCALAIRE

A) DEFINITION

Ce n'est pas une multiplication …

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan .

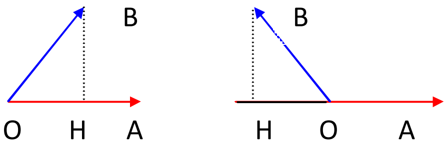
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}$$

$$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$$

$$= \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel**

Montrons que $OA \times OB \times \cos\widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

Deux cas se présentent :

Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens , alors $\widehat{AOB} = \widehat{BOH}$

……
…………..

……
…………..

Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, alors $\widehat{AOB} = \pi - \widehat{BOH}$

………..

………..

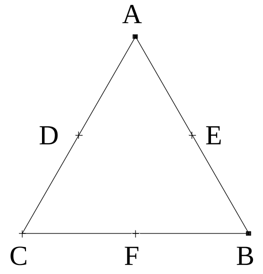
……

Ex 1 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 3 (dans l'unité de longueur choisie) .

Les points E, F et D sont les milieux des côtés.

On a alors :



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$= ………………………………………………………….
- **ou** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = …………………………………………………….
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}$= ………………………………………………………….
- **ou** le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est …………… ,
  donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}$= …………………….

B) REMARQUES

➢ Signe du produit scalaire :

On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{AOB}$.

En effet les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont positives . On en déduit donc que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ est du signe de cos $\widehat{AOB}$.

- Si $0 \leq \widehat{AOB} < 90°$, cos $\widehat{AOB} > 0$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} > 0$
- Si $\widehat{AOB} = 90°$ (c'est à dire $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$) , cos $\widehat{AOB} = 0$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$
- Si $90° < \widehat{AOB} \leq 180°$, cos $\widehat{AOB} < 0$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} < 0$

➢ Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dépend de leur norme :

le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et – 1 . On a donc :

$$-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \leq \vec{u}\,.\,\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$

ou bien $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy – Schwarz).

➢ Un cas particulier : les vecteurs colinéaires

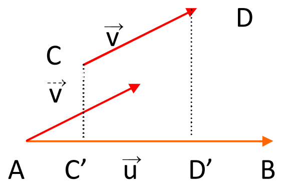
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et cos $(\vec{u}, \vec{v})$ = …….. . Ainsi

  $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ =…………………..

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire** , alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ et cos $(\vec{u}, \vec{v})$ =……… . Ainsi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

➢ Produit scalaire et projection orthogonale :



Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs , on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

Activité 2 page 7 :

2) PROPRIETES

A) OPERATIONS VECTORIELLES

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Linéarité

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\vec{u} \cdot (k\,\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

conséquence :

$(a\,\vec{u}) \cdot (b\,\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Ex 2 :

- $(3\,\vec{u} - 2\,\vec{v}) \cdot (2\,\vec{u} + \vec{v}) =$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :

  - « $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ » :
  - « $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ » :
  - « $\vec{u} \cdot (k + \vec{v})$ » :

Remarque :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :

En effet, on peut avoir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

D'autre part $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$.

B) CARRE SCALAIRE ET NORME

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.
On le note $\vec{u}^{\,2}$.
On a :

$$\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{u} \| = \| \vec{u} \|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :

$$\overrightarrow{AB}^{\,2} = \| \overrightarrow{AB} \|^2 = AB^2$$

Remarque :

- $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^{\,2} = 1$
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables**

$(\vec{u} + \vec{v})^2 =$ …………………….. , $(\vec{u} - \vec{v})^2 =$ ……………………. et $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) =$ ………………

Exemple :

Soit ABC un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et BC = 6.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITE

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si **leur produit scalaire est ……………**

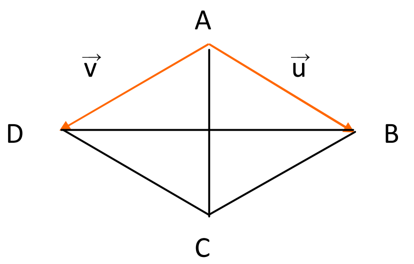
$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Remarque :

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ …

Ex résolu :



Soit ABCD un parallélogramme.
En posant $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AD} = \vec{v}$, on retrouve que ABCD est un losange

si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires .

En effet $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Ainsi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$

sont orthogonaux .

Activité 2 page 10 :

4) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Activité 1 page 12 :

$$\vec{u}\cdot\vec{i} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\vec{i} = x\underbrace{\|\vec{i}\|^2}_{1} + y\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{0} = x$$

$$\vec{u}\cdot\vec{j} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\vec{j} = x\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{0} + y\underbrace{\|\vec{j}\|^2}_{1} = y$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right) = x'\left(\vec{u}\cdot\vec{i}\right)+y'\left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right) = x'x+y'y$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

> **$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y'$** où $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormé** quelconque .

Activité 3 page 12 :

5) APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE : LIGNES DE NIVEAU

Activité 1 page 13 :

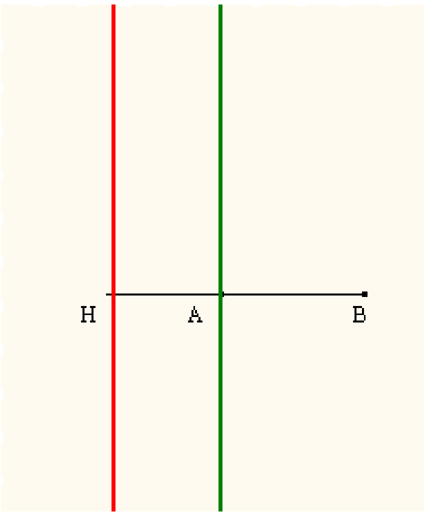
$\mathrm{f}(M) = \vec{AM}\cdot\vec{AB}$.

1) $\mathrm{f}(M) = 0 \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM}\perp\vec{AB} \Leftrightarrow M\in\Delta$. Où Δ est la droite perpendiculaire à (AB) en A.
2) On suppose que AB = 2.
   a) H $\in$ (AB) $\Leftrightarrow$ $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

      $\vec{AH}\cdot\vec{AB} = -1.5 \Rightarrow$ - AH $\times$ AB = -1.5 $\Rightarrow$ AH = $\frac{1.5}{2} = \frac{3}{4}$ (avec $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont de sens contraire)
   b) $\mathrm{f}(M) = -1.5 \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AB} = -1.5 \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AB} = \vec{AH}\cdot\vec{AB} \Leftrightarrow \left(\vec{AM}-\vec{AH}\right)\cdot\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{HM}\cdot\vec{AB} = 0$

      $M\in(D)$. Où (D) est la droite perpendiculaire à (AB) en H.

      (D) est la ligne de niveau – 1.5 de f.



Activité 2 page 13 :

$g(M)=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. AB = 4

1) $g(M)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow M\in\zeta_{[AB]}$.
2) Soit I le milieu de [AB].

a) $g(M)=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=IM^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = IM^2+\overrightarrow{IA}\cdot\left(-\overrightarrow{IA}\right)=IM^2-IA^2$.

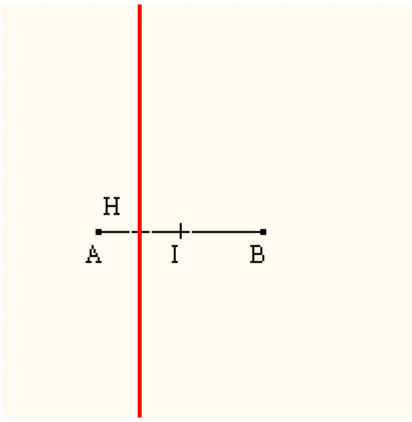
b) $g(M)=12 \Leftrightarrow IM^2-IA^2=12 \Leftrightarrow IM^2=12+IA^2=16 \Leftrightarrow$ IM = 4 $\Leftrightarrow M\in\zeta_{(I,4)}$

Activité 3 page 13 :

$M\in(F)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=k$.

1) k = 0.
   $MA^2-MB^2=0 \Leftrightarrow MA^2=MB^2 \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow M\in méd[AB]$.
2) $MA^2-MB^2=\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\left(\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{BA}}\right)\cdot\left(\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}_{2\overrightarrow{MI}}\right)=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.
3) a) k = -2 et AB = 2.
   $MA^2-MB^2=-2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=-2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=-1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=-1$. Où H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{\text{IH}} \text{ et } \overrightarrow{\text{AB}} \text{ sont de sens contraire}\\ \textit{et}\\ IH\times AB=1\Rightarrow IH=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \text{(F) est la droite perpendiculaire à (AB) en H.}$$



Activité 4 page 13 :

$h(M) = MA^2 + MB^2$.

1) $MA^2 + MB^2 = \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{BA}} \right\|^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2 + 2\left(IM^2 - IA^2\right) = 2IM^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

2) $MA^2 + MB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2IM^2 + \dfrac{AB^2}{2} = AB^2 \Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow IM = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow M \in \zeta_{\left(I, \frac{AB}{2}\right)} \Leftrightarrow M \in \zeta_{[AB]}$.

Exercices 5, 8, 15, 16, 17, 19 pages 19 et 21 :