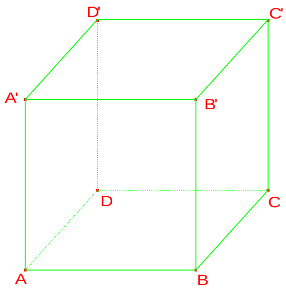
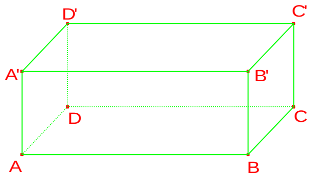
Chapitre 16

Droites et plans de l'espace

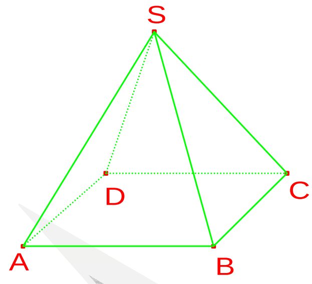
I – Solides de l'espace



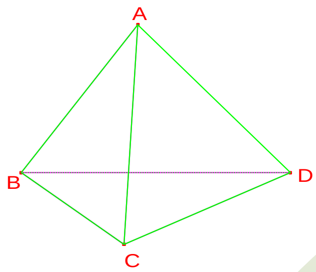
Cube



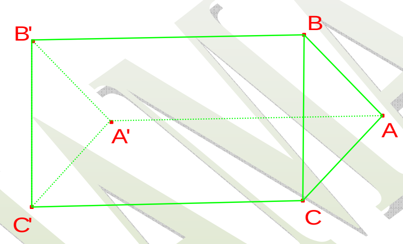
Parallélépipède rectangle



Pyramide



Tétraèdre



Prisme droit

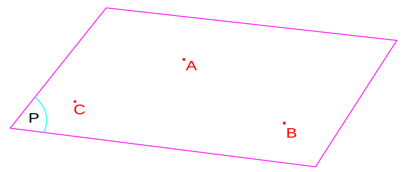
	Cube	Parallélépipède	Pyramide	Tétraèdre	Prisme
Nombre de Faces	6	6	5	4	5
Nombre de Faces Cachées	3	3	3	2	3
Nombre de Sommets	8	8	5	4	6
Nombre d'arrêtes	12	12	8	6	9
Nombre d'arrêtes cachées	3	3	3	1	3
Forme de la base	carré	rectangle	carré	triangle	triangle
Volume	a^3 a: long d'une arête	$a \times b \times c$ $a, b\ et\ c$: les longs des différentes arêtes	$\frac{B \times h}{3}$ B: aire de la base h: la hauteur entre le sommet et le centre de la base	$\frac{B \times h}{3}$ B: aire de la base h: la hauteur entre le sommet et le centre de la base	$B \times h$ B: aire de la base h: la hauteur entre le sommet et le centre de la base

Ces valeurs sont pour les solides représentés ci-dessus

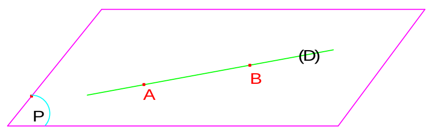
II – Les axiomes de base

En géométrie dans l'espace on admet les 4 axiomes suivants

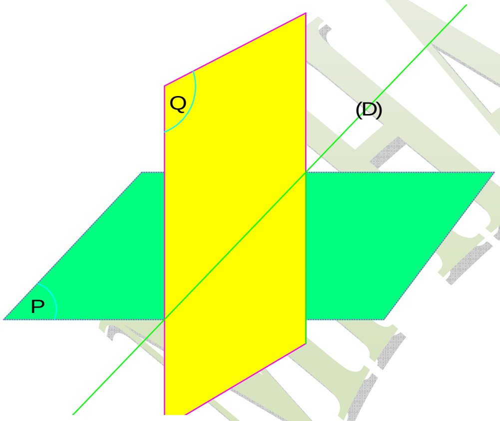
- **Axiome 1** : Par trois points non alignés passe un plan et un seul



- **Axiome 2** : Si un plan contient deux points distincts alors il contient toute la droite passant par ces deux points



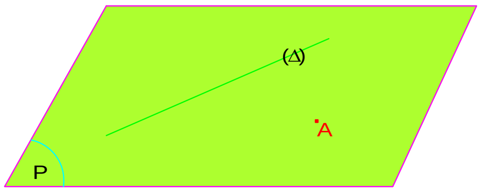
- **Axiome 3** : Si deux plans distincts ont un point commun alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point



- **Axiome 4** : Tous les résultats de la géométrie plane sont applicables

III – Détermination d'un plan

Soit Δ une droite et un point A n'appartenant pas à Δ.
Il existe un et un seul plan P contenant la droite Δ et le point A.



Démonstration :

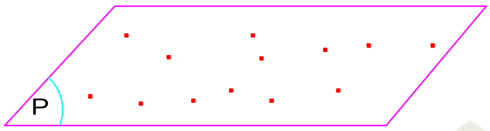
Existence : Soit Δ une droite et un point A n'appartenant pas à Δ. Il existe deux points M et N distincts de Δ donc les points A, M et N sont non alignés or d'après l'axiome 1 : Par trois points non alignés passe un plan P

Unicité : supposons qu'il existe un deuxième plan Q différent du plan P qui passe par A et Δ donc Q passe par les trois points A, M et N non alignés absurde on a par trois points non alignés passe un plan et un seul

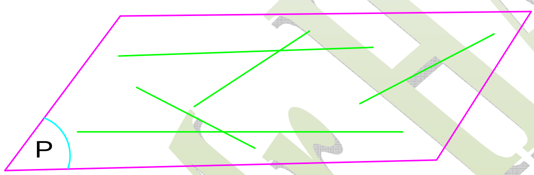
IV – Points coplanaires – Droites coplanaires

Définition :

- On dit que des points de l'espace sont coplanaires lorsqu'ils sont contenus dans un même plan.

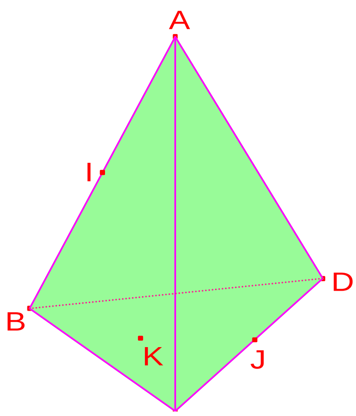


- On dit que des droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont contenus dans un même plan.



Exemples :

Soit ABCD un tétraèdre, I un point de l'arête $[AB]$ distinct de A et de B, J un pont de l'arête $[CD]$ distinct de C et de D et K un point du plan (BCD)



1) Les droites (IJ) et (BC) sont elles coplanaires ?
   Non Les droites (IJ) et (BC) ne sont pas coplanaires car (BC) est contenus dans les deux plans (BCD) et (ABC) et (IJ) n'est contenu ni dans (BCD) ni dans (ABC)
2) Les points I,J,A et C sont ils coplanaires ?
   $I \in (ABC)$ donc I, A, B et C sont coplanaires
   $J \in (ADC)$ donc I, A, D et C sont coplanaires ; or
   $(ABC) et (ADC)$ deux plans distincts donc I,J,A et C ne sont pas coplanaires

V – Positions relatives de droites et de plans

1 – Positions relatives de deux droites dans l'espace

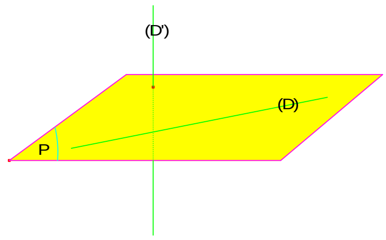


Figure 1

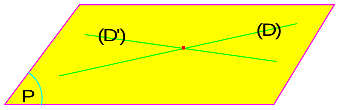


Figure 2

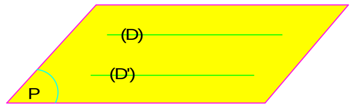


Figure 3

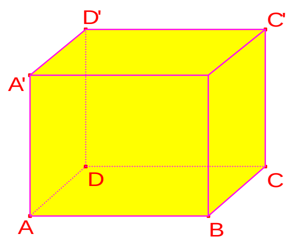
- Figure 1 : Les droites D et D' ne sont pas coplanaires ($D \cap D' = \emptyset$)
- Figure 1 : Les droites D et D' sont coplanaires (D et D' sont sécantes) ($D \cap D' = \{A\}$)
- Figure 1 : Les droites D et D' sont coplanaires (D // D') ($D \cap D' = \emptyset$)

Définition :

On dit que deux droites coplanaires D et D' sont sécantes lorsque leur intersection est un point

Exemple :

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un cube



1) Déterminer les positions relatives des droites (AB) et (A'B').
   La face (ABCD) est un carré donc (AB) // (A'B').
2) Déterminer les positions relatives des droites (CD) et (CD').
   Les droites (CD) et (CD') sont contenues dans la face (CDC'D') donc coplanaires et de plus se coupent au point C

2 – Positions relatives d'une droite et d'un plan

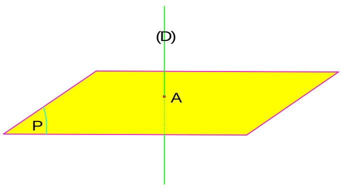


Figure 1

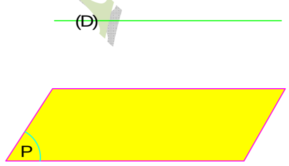


Figure 2

Figure 3

- Figure 1 : La droite D et le Plan P sont sécants au point A ($D \cap P = \{A\}$)
- Figure 2 : La droite D est parallèle au Plan ($D \cap P = \emptyset$)
- Figure 3 : La droite D est contenue dans le Plan ($D \cap P = D$)

Définition :

On dit que deux droites coplanaires D et D' sont sécantes lorsque leur intersection est un point

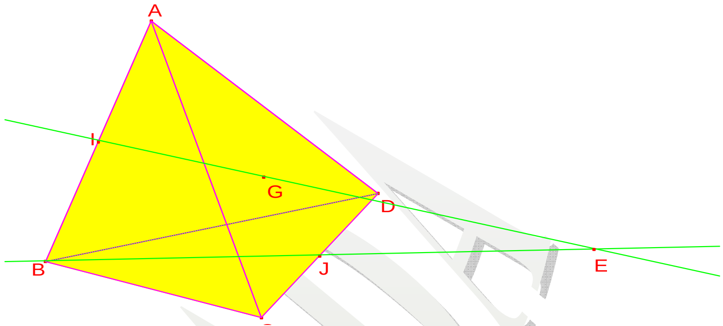
Vocabulaire : Lorsqu'une droite et plan sont sécants on dit que la droite perce le plan ou que le plan coupe la droite.

Exemple :

Soient ABCD un tétraèdre, I le milieu de [AB], J le milieu de [CD] et G le centre de gravité du triangle ACD.

1) Montrer que les droites (IG) et (BJ) sont sécantes.

2) En déduire que la droite (IG) perce le plan (BCD) en un point E que l'on déterminera.



Réponse :

1) G est le centre de gravité du triangle ACD donc $G \in [AG]$ donc $G \in (ABJ)$

$I \in [AB]$ donc $I \in (ABJ)$, on tire que (IG) et (BJ) sont deux droites coplanaires du plan (ABJ)Or dans le triangle ABJ on a : $AI = \frac{1}{2}AB \; et \; AG = \frac{2}{3}AJ$ donc (IG) et (BJ) ne sont pas parallèles

2) La droite (BJ) est contenue dans le plan (BCD) et on a (IG) n'est pas parallèle à (BJ) donc (IG) n'est pas parallèle au plan (BCD) donc (IG) perce le plan (BCD) en un point E, or (IG) et (BJ) sont sécantes et (BJ) est contenue dans le plan (BCD) donc le point E est l'intersection de (IG) et (BJ)

2 – positions relatives de deux plans

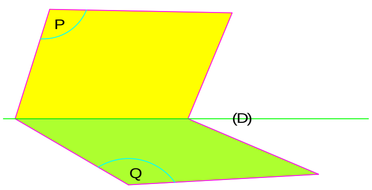


Figure 1

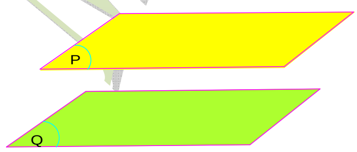


Figure 2

Figure 3

- Figure 1 : Les plans P et Q sont sécants $(Q \cap P = D)$
- Figure 2 : Les plans P et Q sont strictement parallèles $(Q \cap P = \emptyset)$
- Figure 3 : Les plans P et Q sont confondus $(Q \cap P = P = Q)$

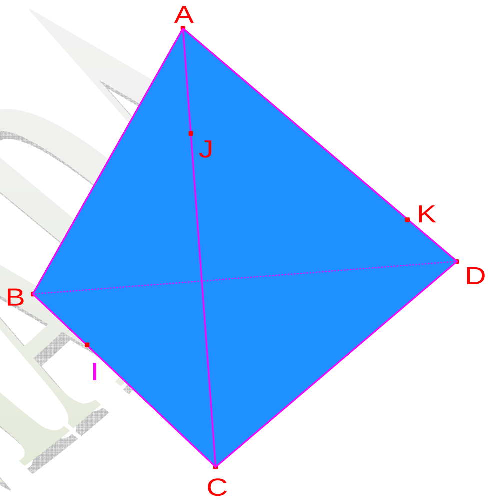
Définition :

On dit que deux plans sont sécants lorsque leur intersection est une droite

Exemple :

Soient ABCD un tétraèdre, I,J et K des points sur les arêtes [BC], [AC] et [AD]

1) Déterminer l'intersection des plans (ACI) et (BDJ)
2) Déterminer l'intersection des plans (ABK) et (CDJ)



Réponse :

1) $(ACI) = (ABC)$, or $(BJ) \subset (ABC)$ donc $(ACI) \cap (BDJ) = (BJ)$
2) $(ABK) = (ABD)$ et $(CDJ) = (CDA)$ donc $(ABK) \cap (CDJ) = (ABD) \cap (CDA) = (AD)$