EXERCICE N°1

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.
1°) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir
a) 3 boules blanches et deux boules noires ?
b) des boules de couleurs différentes ?
2°) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.
Quelle est la probabilité d'obtenir
a) 3 boules blanches et 2 boules noires, dans cet ordre ?
b) 3 boules blanches et 2 boules noires dans un ordre quelconque ?
3°) On tire successivement 3 boules en remettant la boule après chaque tirage si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer
a) exactement une boule blanche ?
b) au moins une boule blanche?

EXERCICE N°2

Deux urnes U_1 et U_2 indiscernables contiennent respectivement :
Urne U_1 : 3 boules rouges , 2 boules vertes.
Urne U_2 : 2 boules rouges , 1 boules vertes.
On choisit une urne au hasard et on tire un boule dans cette urne.
1°)Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2°)On suppose que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.

EXERCICE N°3

Une urne contient 3 boules (a) et 2 boules (b)
On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.
Quelle est la probabilité de tire un jeton (b) en premier et jeton (a) en second ?

EXERCICE N°4

Une urne contient des jetons de 2 couleurs: Rouge et Noire, portant chacun un numéro.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
La probabilité pour que le jeton soit rouge est 1/3 .
La probabilité pour que le jeton porte un numéro pair est 4/9 .
La probabilité pour que le jeton soit rouge et porte un numéro pair est 1/9 .
1° Quelle est la probabilité que le jeton soit noir?
2° Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro impair?
3° Quelle est la probabilité pour que le jeton soit noir et porte un numéro impair?
4° Les événements " être noir" et "porter un numéro impair" sont-ils indépendants?
5° Si on sait que le jeton tiré est noir, alors quelle est la probabilité pour que ce jeton porte un numéro impair?

EXERCICE N°5

Partie I.

Une urne contient deux boules blanches et n boules noires, indiscernables au toucher.
Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement : " Le joueur a tiré deux boules blanches ".

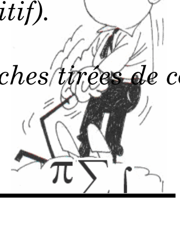
Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

Partie II.

Dans toute la suite du problème, on prend n = 4.
Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :
A_0 :l'événement : " Le joueur a tiré deux boules noires ".
A_1 :l'événement : " Le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche ".
A_2 :l'événement : " Le joueur a tiré deux boules blanches ".
1°)Calculer la probabilité des événements A_0 et A_1.
2°)Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et perd deux points pour chaque boule noire tirée.
Calculer la probabilité que le joueur soit gagnant (c'est à dire qu'il ai un score strictement positif).

Partioe III.

Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.
Soit B_i l'événement : " On obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage " (i = 0, 1 ou 2)



1°)Donner $p(B_0 | A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.
Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.

En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.

2°)Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE N°6

On dispose de deux dés cubiques d'apparences identiques : l'un est parfait et l'autre est truqué. Pour le dé truqué, la probabilité d'obtenir un six est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1°) a) On lance le dé parfait 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

b) On lance le dé truqué 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

2°) On choisit l'un des deux dés précédents au hasard (les deux dés ont donc la même probabilité d'être choisis) et on lance ce dé 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants.

On désigne par T, l'événement : « choisir le dé truqué »,
par $\overline{T}$, l'événement contraire de T,
par A, l'événement : « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux six »,
par B, l'événement : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six »,
par C l'événement : « obtenir exactement deux six ».

On pourra admettre que la réponse au 1.a. est $\frac{5}{72}$ et que la réponse au 1.b. est $\frac{2}{9}$.

a) *Calculer la probabilité de l'événement A puis celle de l'événement B.*
b) *En déduire la probabilité de l'événement C.*
c) *Déterminer la probabilité d'avoir choisi le dé truqué, sachant qu'on a obtenu exactement deux six.*

EXERCICE N°7

1°) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2.
Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.
On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).

a) *Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?*
b) *On a tiré un jeton portant le numéro 1.*
   Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2°) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a) *Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.*
b) *Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.*
   Déterminer la loi de probabilité de S.
c) *Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros est impaire, Claude donne 10 dt à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ dt de Dominique.*
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
   Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que E(X) soit égale à 0).

EXERCICE N°8

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires, indiscernables au toucher.
1°) On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.
On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;
on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$ et $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2°)Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne.
On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;
on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;
on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».
a) Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.

b) Calculer $p(B_0)$.

d) On n'a obtenu aucune boule noire lors de ce second tirage.
Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?
3°) On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que p (R) = $\frac{1}{3}$.

EXERCICE N°9

Robin joue avec un jeu électronique.
Une partie consiste en un duel entre Robin et trois monstres, M_1 , M_2 *ou* M_3 *, choisi par la machine.*
Le jeu est programmé de telle sorte que, pour chaque partie, le monstre M_1 *a une chance sur deux d'apparaître, les deux autres monstres ayant la même probabilité d'apparition.*
On admet que lors d'un combat, la probabilité pour Robin de gagner est respectivement de :
0,3 contre M_1, *0,4 contre* M_2 *et 1 contre* M_3.
1°) Robin joue une partie.
Calculer la probabilité pour qu'il gagne cette partie.
2°) Sachant que Robin a perdu la partie, quelles sont les probabilités pour :
a) qu'il ait joué contre le monstre Ml ?
b) qu'il ait joué contre le monstre M3 ?
3°) Robin joue quatre parties consécutivement. On admet que les parties sont jouées indépendamment.
Calculer les probabilités pour que : Robin gagne au moins une partie

EXERCICE N°10

Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen. L'examinateur décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.
1°) Dans cette question, on suppose que l'examinateur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.
On désigne par F_1 *l'événement : " le premier candidat interrogé est une fille ",*
et par F_2 *l'événement : " le deuxième candidat interrogé est une fille ".*

a) *Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles ?*
b) *Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille ?*
c) *Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille ?*

2°) On suppose maintenant que l'examinateur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les sept, procède à un tirage simultané de quatre noms. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.

a) *Quelle est la loi de probabilité de X ?*
b) *Calculer l'espérance mathématique de X.*

EXERCICE N°11

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.
Si le joueur obtient 3 boules rouges, événement que l'on note R_3, *il gagne 500 dt.*
S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, événement que l'on note R_2, *il gagne 300 dt.*
Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges il ne gagne rien, on note cet événement E.

1°) Montrer que les probabilités des événements R_2 *et* R_3 *sont :* $P(R_2) = \frac{5}{12}$ *et* $P(R_3) = \frac{1}{12}$.
2°) On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.
Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
3°) Dans cette question on modifie les règles du jeu de la façon suivante :

- *Si le joueur réalise les événements* R_3 *et* R_2 *il ne gagne plus d'argent immédiatement mais est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle " Banco ".*
- *Si l'événement E est réalisé le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le " Banco ".*

Le " Banco " consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est verte le joueur empoche les 1000 dt du " Banco " et si elle est rouge le joueur a perdu mais repart avec une prime de " consolation " de 200 dt.

a) *Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco " sachant que* R_3 *est réalisé ?*
b) *Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco " sachant que* R_2 *est réalisé ?*
c) *En déduire la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco ".*

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu. Y peut donc prendre les valeurs 0, 200 ou 1000.

d) *Etablir la loi de probabilité de Y.*
e) *Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X.*

EXERCICE N°12

1°) Soit P une loi de probabilité sur [0 ; 2π] de densité f définie sur [0 ; 2π] par : f(x) = λ sin $\frac{x}{2}$.

a) *Déterminer λ.*

b) *Calculer* $P\left(\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

2°) La durée d'attente X en secondes, à la caisse rapide d'un supermarché, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{200}$, *c'est-à-dire que pour tout réel t≥ 0 on a :*

$$P(X<t)=\int_0^t \frac{1}{200}e^{\frac{-x}{200}}dx.$$

a) *Calculer la probabilité que l'attente soit inférieure à 1 minute.*
b) *Calculer la probabilité que l'attente dépasse 3 minutes.*

EXERCICE N°13

1°) Soit P une loi de probabilité sur [1 ; 10] de densité f définie par f(x) = $\frac{\lambda}{x^3}$.

a) *Déterminer λ.*
b) *Calculer P([2 ;5]).*

2°) La durée de vie (en heures) d'un élément mécanique a été modélisée par une variable aléatoire X telle que pour tout réel t ≥ 0 : $P(X < t) = 0{,}002 \int_0^t e^{-0{,}002x}dx$

a) *Vérifier que la loi de X est une loi exponentielle dont on précisera le paramètre λ.*
b) *Calculer P(X < 400).*
c) *Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieur à 1000 heures sachant qu'il a déjà tenu 500 heures.*

EXERCICE N°14

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p *de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; +∞[: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de* t *semaines est* $p([0,t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser p([0 ; 200]) = 0,5.

1°)Montrer que $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

2°)Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3°)On admet que la durée de vie moyenne d_m *de ces composants est la limite quand* A *tend vers +∞ de* $\int_0^A \lambda t e^{-\lambda t}dt$.

a)Montrer que $\int_0^A \lambda t e^{-\lambda t}dt=\frac{-\lambda A e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$.

b)En déduire d_m *on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semai*