Lycée de Souassi * * * **DEVOIR DE SYNTHESE N° 2** * * * *04/03/2009*	**SECTIONS :** 4$^{\text{éme}}$ *Sciences de l'informatique 2* **EPREUVE :** *Mathématiques* **DUREE :** 3 *heures* **PROFESSEUR :** *Mr FLIGENE Wissem*

<u>EXERCICE N° 1</u>: (3 points)

Cet exercice est un Q.C.M (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : *Une mauvaise réponse enlève la moitié des points attribués à la question. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.*

Pour toutes les questions suivantes, on donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $]-3,+\infty[$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

x	-3		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	1

Q1	F désigne une primitive de f sur $]-3,+\infty[$. F est :	a) strictement décroissante sur $]-2;3[$ b) strictement décroissante sur $]-3;1[$ c) strictement croissante sur $]-2;3[$
Q2	La courbe (C) admet pour asymptote la droite d'équation :	a) $y=-3$ b) $x=1$ c) $x=-3$
Q3	g est la fonction définie par $g(x)=\ln[f(x)]$ sur l'intervalle $]3,+\infty[$. On peut affirmer que :	a) $0<g(x)<1$ b) $g(x)>0$ c) $g(x)<0$

<u>EXERCICE N° 2</u>: (5 points)

En annexe, on donne le graphique représentant la courbe (C_f) d'une fonction bijective de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

La courbe (C_f) admet une asymptote $D : y = 2x$

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f

1- Que peut-on dire de la dérivabilité de f à droite en 1 ? en déduire la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1

2- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$

3- Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}

4- Tracer, sur le graphique, la courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$ de f^{-1}

<u>EXERCICE N° 3</u>: (6 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1-x^2-\ln x$

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$.

II. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{2x}-\dfrac{x}{2}+1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Calculer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   c. Montrer que la droite D d'équation $y=-\dfrac{x}{2}+1$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
   d. Etudier les positions relatives de la droite D et de la courbe C_f.
2. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Tracer la droite D et la courbe C_f dans le repère fourni en annexe.

<u>EXERCICE N° 4</u>: (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,2)$, $B(1,1,4)$, $C(-1,1,1)$ et $E\left(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5},0\right)$

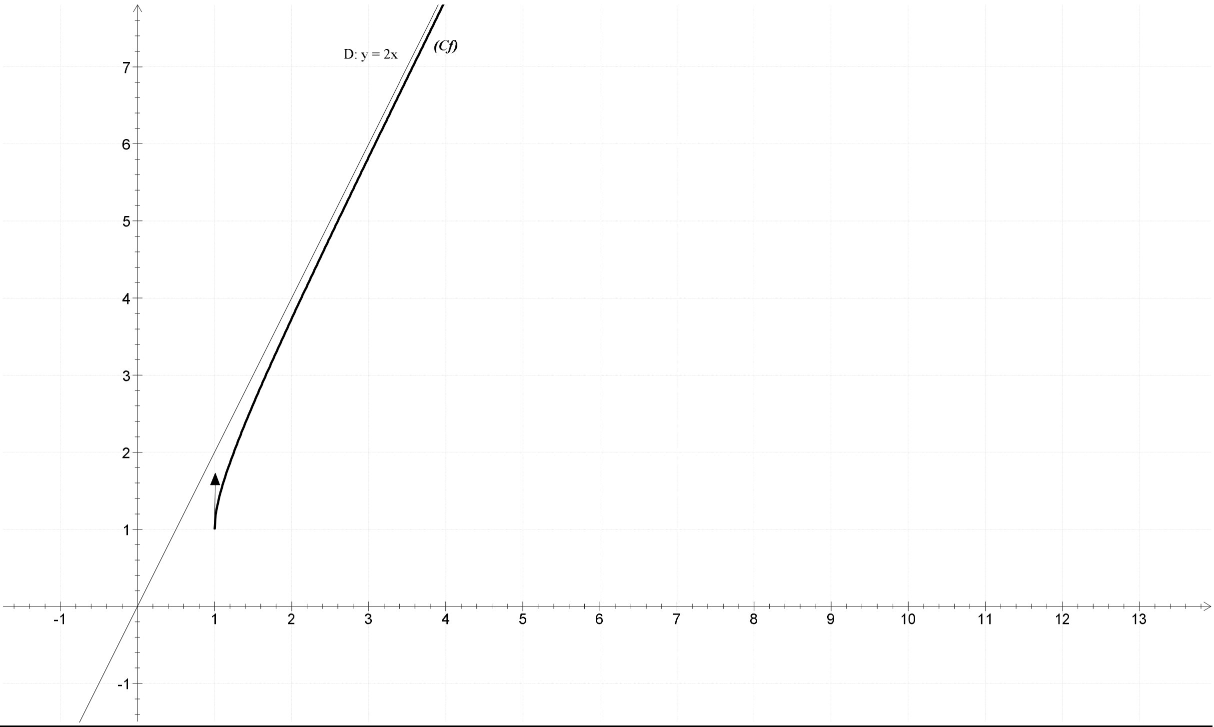
1. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par E et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)
   c. Montrer que les droites D et (AB) ne sont pas coplanaires
2. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
   b. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

      En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
3. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$
   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon la droite D
   b. Déterminer $P_1\cap P_2\cap(ABC)$

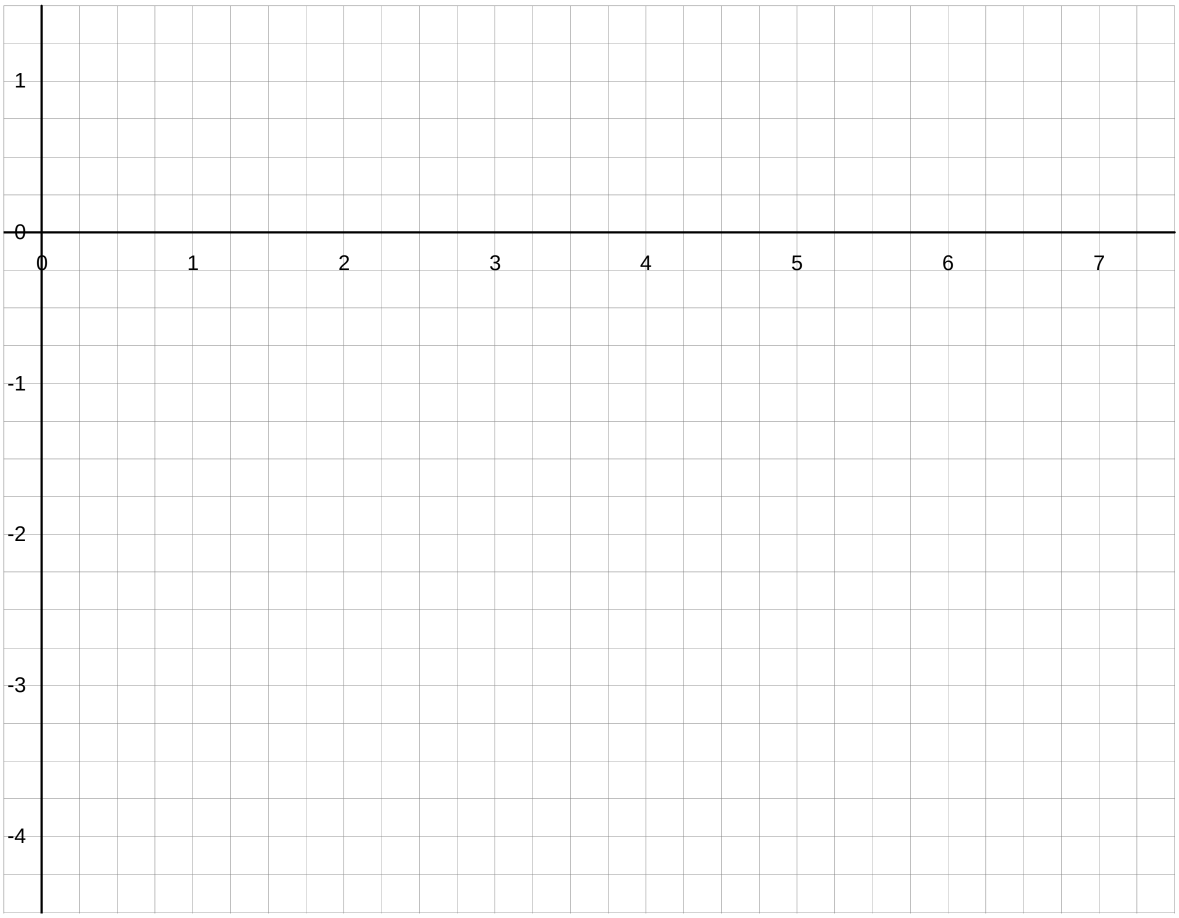
ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Nom : Prénom : 4 Sc.Inf 2

EXERCICE N° 2:



EXERCICE N° 3:



Correction

Solution-Exercice 1

Q_1 – a) ; Q_2 – c) ; Q_3 – c)

Solution-Exercice 2

1- (Cf) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale donc f n'est pas dérivable à droite en 1

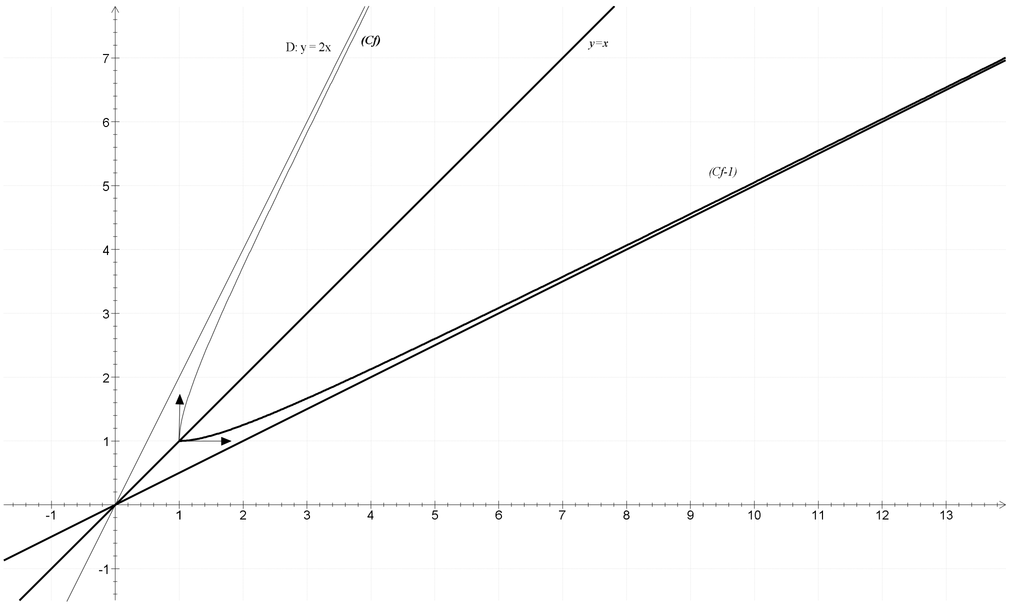
Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, $\left(C_{f^{-1}}\right)$ admet au point d'abscisse $f(1)=1$ une demi-tangente horizontale donc f^{-1} est dérivable à droite en 1 et $\left(f^{-1}\right)'_d(1) = 0$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right) = 0$

3- f et f^{-1} ont même sens de variations, et puisque f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
f^{-1}	$1 \nearrow +\infty$

4-



Solution-Exercice 3

I- $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$; $D_g =]0,+\infty[$

1- g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme étant somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$)

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$ pour tout $x > 0$. Donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

2- $g(1) = 1 - 1 - ln1 = 0$

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$\searrow 0 \searrow$

D'où

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II- $f(x) = \frac{\ln x}{2x} - \frac{x}{2} + 1$; $D_f =]0,+\infty[$

1- a- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à C_f

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2} + 1 = -\infty$

c- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right)\right] = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc $D : y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

d- $f(x) - y = \dfrac{\ln x}{2x}$ donc pour tout $x > 0$, le signe de $f(x) - y$ est celui de lnx

- Si $0 < x < 1$ alors $f(x) - y < 0$ et par suite C_f est en dessous de D
- Si $x > 1$ alors $f(x) - y > 0$ et par suite C_f est au dessus de D
- Si $x = 1$ alors $C_f \cap D = \left\{A\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

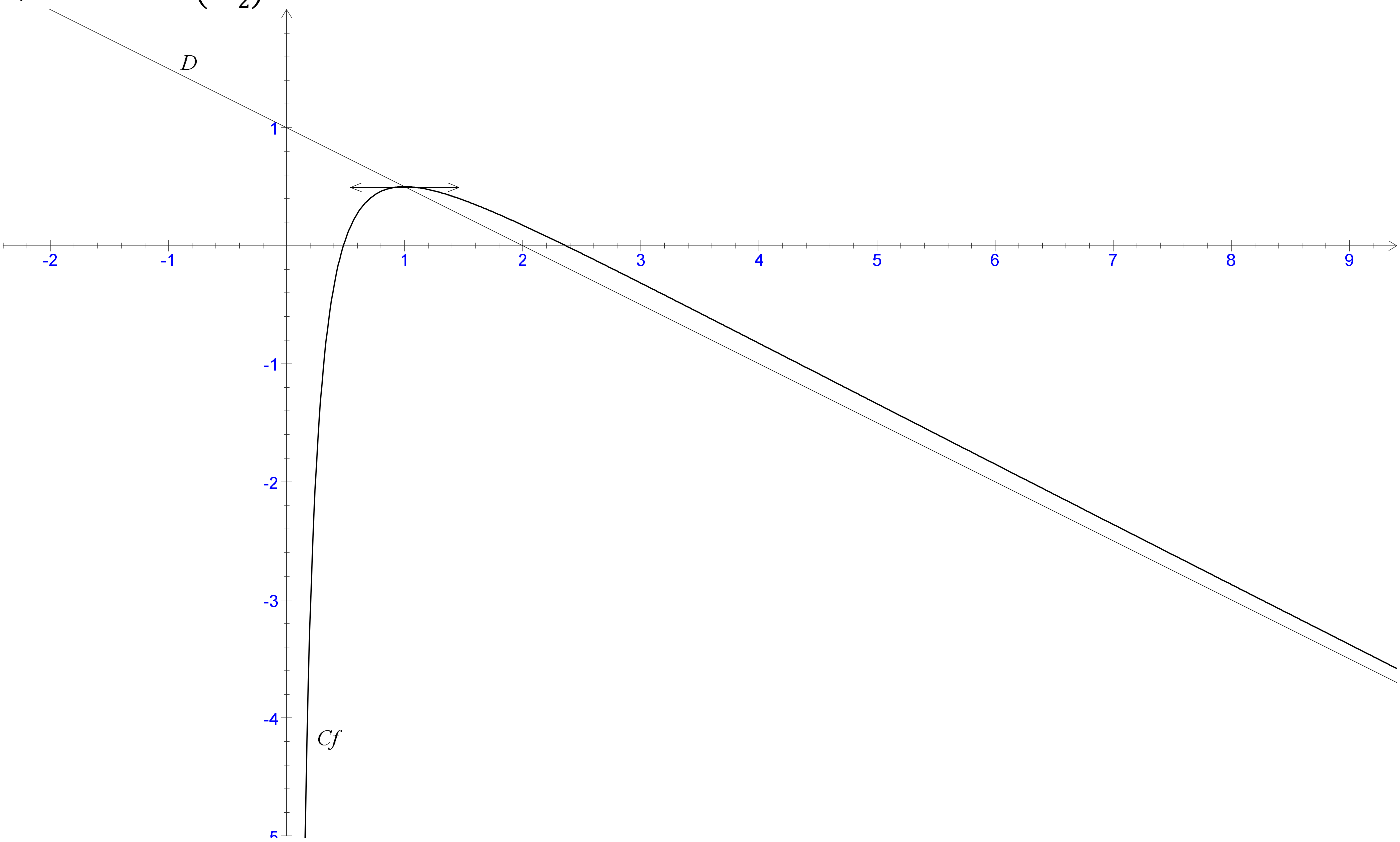
2- a- $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times 2x - 2lnx}{4x^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-2lnx}{4x^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-lnx}{2x^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-lnx-x^2}{2x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

b- pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

3-

C_f admet en $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ une tangente horizontale



__Solution-Exercice 4__

1- a- $D: \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\alpha \\ y = -\frac{1}{5} + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

b- (AB) est la droite passant par A et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ alors

$(AB): \begin{cases} x = 1 \\ y = \beta \\ z = 2 + 2\beta \end{cases}$; $\beta \in \mathbb{R}$

c- $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

$\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{2}$ alors $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires et par suite D et (AB) ne sont pas parallèles $(*)$

Étudions l'intersection de D et (AB) : soit $M(x,y,z) \in D \cap (AB)$ alors $\begin{cases} -\frac{2}{5} - 2\alpha = 1 & (1) \\ -\frac{1}{5} + 2\alpha = \beta & (2) \\ \alpha = 2 + 2\beta & (3) \end{cases}$

(1) donne $2\alpha = -1 - \frac{2}{5} = -\frac{7}{5} \Rightarrow \alpha = -\frac{7}{10}$

(2) donne $\beta = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5} = -\frac{8}{5}$

Remplaçons les valeurs de α et β dans (3) : $-\frac{7}{10} = -\frac{12}{10}$ ce qui est impossible donc $\underline{D \cap (AB) = \emptyset}$ $(**)$

$(*)$ et $(**)$ donnent D et (AB) ne sont pas coplanaires

2- a- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{1}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C ne sont pas alignés

b- $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$: $3 \times 0 + 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 4 - 4 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$: $3 \times (-2) + 4 \times 1 + (-2) \times (-1) = -6 + 4 + 2 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs du plan (ABC) et qui ne sont pas colinéaires alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à (ABC) d'où (ABC) :$3x + 4y - 2z + d = 0$ or $A(1,0,2) \in (ABC)$ alors
$3 \times 1 + 4 \times 0 - 2 \times 2 + d = 0$ d'où $d = 1$

Conclusion : $\boxed{(ABC): 3x + 4y - 2z + 1 = 0}$

3- $P_1 : 2x + y + 2z + 1 = 0$; $P_2 : x - 2y + 6z = 0$; $D : \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\alpha \\ y = -\frac{1}{5} + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

a- Etudions l'intersection de P_1 et D

Soit $M(x,y,z) \in D \cap P_1$ alors $2\left(-\frac{2}{5} - 2\alpha\right) + \left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right) + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$-\frac{4}{5} - 4\alpha - \frac{1}{5} + 2\alpha + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ donc $D \subset P_1$

Etudions l'intersection de P_2 et D

Soit $M(x,y,z) \in D \cap P_2$ alors $-\frac{2}{5} - 2\alpha - 2\left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right) + 6\,\alpha = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} - 2\alpha + \frac{2}{5} - 4\alpha + 6\,\alpha = 0$
$\Leftrightarrow 0 = 0$ donc $D \subset P_2$

Comme P_1 et P_2 ne sont pas confondus (puisque leurs équations ne sont pas équivalentes) alors P_1 et P_2 sont sécants selon la droite D

b- On a : $P_1 \cap P_2 = D$, étudions donc l'intersection de D et le plan (ABC)

Soit $M(x,y,z) \in D \cap (ABC)$ alors $3 \times \left(-\frac{2}{5} - 2\alpha\right) + 4\left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right) - 2\alpha + 1 = 0$
$\Leftrightarrow -\frac{6}{5} - 6\alpha - \frac{4}{5} + 8\alpha - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$ Impossible donc $D \cap (ABC) = \emptyset$

D'où $\boxed{P_1 \cap P_2 \cap (ABC) = \emptyset}$