

Equations différentielles (bac exp.) Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. N°2 : (ENONCE)

1°/ Résoudre les équations différentielles suivantes :

a / $y''+4y=0$; vérifiant : $f(0)=3$ et $f'(0)=-1$

b / $y''+y=0$; vérifiant : $f(0)=3$ et $f'(\pi)=-2$

2°/ a / $4y''+9y=0$; vérifiant : $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ et $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et mettre cette solution sous la forme : $f(x)=A\cos(\omega x+\Phi)$ où A , ω et Φ des réels à déterminer

b / $9y''+16y=0$; vérifiant : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{8}{3}$ et mettre cette solution sous la forme : $f(x)=A\cos(\omega x+\Phi)$ où A , ω et Φ des réels à déterminer

EXO. N°2 : (SOLUTION)

L'équation différentielle : $y''+\omega^2y=0$ admet comme solutions sur \square les fonctions définies par : $f(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$ où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

1°/ a / Les solutions de l'équation : $y''+2^2y=0$ sont les fonctions définies sur \square par :

$$f(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes arbitraires.}$$

On a : $\forall x \in \square$; $f'(x)=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x)$.

• $f(0)=3 \Leftrightarrow A=3$ et $f'(0)=-1 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{2}$

Conclusion : $f(x)=3\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)$; $x \in \square$

b / Les solutions de l'équation : $y''+y=0$ sont les fonctions définies sur \square par :

$$f(x)=A\cos(x)+B\sin(x) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes arbitraires.}$$

On a : $\forall x \in \square$; $f'(x)=-A\sin(x)+B\cos(x)$.

• $f(0)=3 \Leftrightarrow A=3$ et $f'(\pi)=-2 \Leftrightarrow B=2$

Conclusion : $f(x)=3\cos(x)+2\sin(x)$ pour tout $x \in \square$

2°/ a / $4y''+9y=0 \Leftrightarrow y''+\left(\frac{3}{2}\right)^2y=0$ donc ses solutions sont les fonctions définies sur \square par :

$$f(x)=A\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{3}{2}x\right) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes arbitraires.}$$

On a : $\forall x \in \square$; $f'(x)=-\frac{3}{2}A\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+B\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$.

• $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow A=1$ et $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow B=-\sqrt{3}$

Conclusion : $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$ pour tout $x \in \square$

FATNASSI BECHIR

- $$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 2 \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right]$$

$$= 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right]$$

$$= 2 \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{(\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b))}$$

b / $9y'' + 16y = 0 \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{4}{3}\right)^2 y = 0$ donc les solutions de l'équation sont les fonctions définies

sur \mathbb{R} par : $f(x) = A \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + B \sin\left(\frac{4}{3}x\right)$ où A et B sont des réels

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -\frac{4}{3}A \sin\left(\frac{4}{3}x\right) + \frac{4}{3}B \cos\left(\frac{4}{3}x\right)$

- $$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = \sqrt{3} \\ -2A\sqrt{3} - 2B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ -2A\sqrt{3} - 2B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A\sqrt{3} + 6B = 12 & (1) \\ -2A\sqrt{3} - 2B = -8 & (2) \end{cases}$$

(1)+(2) donne : $4B = 4 \Leftrightarrow B = 1$ et (1) donne : $A = \sqrt{3}$

Conclusion : $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \sin\left(\frac{4}{3}x\right) ; x \in \mathbb{R}$

- $$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \sin\left(\frac{4}{3}x\right) = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{3}x\right) \right]$$

$$= 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{4}{3}x\right) \right]$$

$$= 2 \cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{(\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b))}$$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR