◇◇◇ République Tunisienne / Ministère de l'éducation ◇◇◇			A.S. : 2022/2023
Matière: Mathématiques	4ème Sc.Exp	Date: 12/05/2023	Durée : 3h

Devoir de Synthèse n°3

Exercice N° 1 (5 points)

Une usine est spécialisée dans la fabrication en série d'un article .
Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par cette usine pouvait présenter deux types de défaut : un défaut D_1 avec une probabilité de $0,03$ et un défaut D_2 avec une probabilité de $0,02$ .Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants .
Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un de deux défauts .

1) Montrer que la probabilité de l'événement :
D ≪ un article fabriqué par cette usine est défectueux ≫ est égal à $0,0494$.

2) Un dépositaire (grossiste)reçoit 800 articles de cette usine .
Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 , articles associe le nombre d'articles défectueux .
   a) Déterminer la loi de probabilité de X .
   b) Quel est le nombre moyen d'articles défectueux pour un lot de 800 articles ?

3) a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles d'une société S chez ce dépositaire.
Calculer ,à 10^{-3} près , la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans cette commande .
   b) Ce petit commerçant veut que sur sa commande , la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50% .
Déterminer la valeur maximale du nombre d'articles qu'il peut commander .

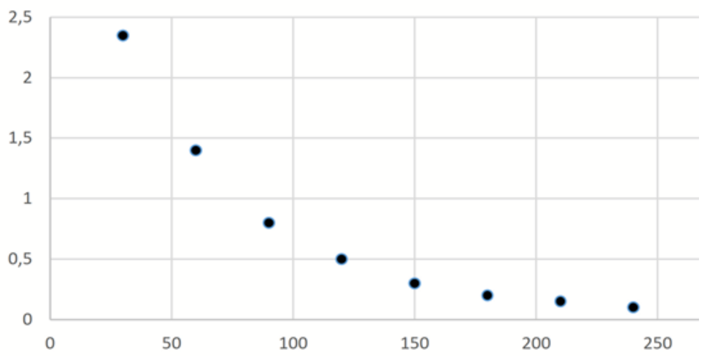
4) La variable aléatoire T , qui à tout article fabriqué par cette usine associe sa durée de vie **en jours** , suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0007$.
(On donnera les valeurs arrondis à 10^{-3} près) .
   a) Quelle est la probabilité qu'un article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours ?
   b) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours , calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 1000 jours .
   c) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours , calculer la probabilité qu'il ne tombe pas en panne avant 1000 jours .

Exercice N°2 (4 points)

On a mesuré à différents instants t , la tension U d'un condensateur se déchargeant dans une résistance . On a obtenu les résultats suivants :

t en secondes	30	60	90	120	150	180	210	240
U en volts	2,35	1,40	0,80	0,50	0,30	0,20	0,15	0,1

On a représenté ci-contre , le nuage des points de la série (t, U) .



1) Indiquer si ce nuage justifie la recherche d'un ajustement affine entre t et U.

2) On pose $Y = \ln U$.(les valeurs seront arrondies à 10^{-2} prés)

a) Compléter le tableau suivant , après l'avoir recopier sur votre copie .

t en secondes	30	60	90	120	150	180	210	240
Y								

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (t, Y) .

c) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en t

3) a) Montrer qu'on peut exprimer U en fonction de t sous la forme : $U = \alpha e^{t\beta}$.
et donner les valeurs de α et β arrondies à 10^{-2} près.

b) Estimer la tension U au début de la décharge .

Exercice N°3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)$.

1) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

2) On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}\,dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{(t-1)^{2n}}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}}\,dt$, et
$K = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + 2}\,dt$.

a) Calculer I_0

b) Montrer que $I_0 + I_1 = K$.

3) a) A l'aide d'une intégration par partie , montrer que $I_1 = 2\sqrt{2} - K$
. En déduire la valeur de I_1.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Exercice N°4 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1} + 2$.
On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
(unités graphiques: 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées) .

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x + 1$.
   - a) Dresser le tableau de variation de g.
   - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α puis vérifier que $\alpha \in]1,2;1,3[$
   - c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement ce résultat .
3.
   - a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   - b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe (C_f).
   - c) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ)
4.
   - a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$
   - b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.
   - c) Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C_f).
6. Pour tout entier naturel n , tel que $n \geqslant 2$, on note A_n l'aire de la région du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $x = 2$; $x = n$ et $y = 2$ (en unité d'aire).
   - a) Montrer que pour tout réel x , tel que $x \geqslant 2$, on a : $\dfrac{7}{8}xe^{-x} \leqslant \dfrac{x}{e^x+1} \leqslant xe^{-x}$.
   - b) A l'aide d'une intégration par partie , calculer $\displaystyle\int_2^n xe^{-x}dx$ en fonction de n.
   - c) Donner un encadrement de A_n en fonction de n.

Profs et Lycées :

Douma Ali(L.Ghraiba Sfax1) / **Gari Habib**(L.Bir Lahmar) / **Jemli Neji**(L.Raggada Kairouan) **Jmil Belgacem**(L.Rogba Tataouine) / **Debbabi Mohamed** (L.Cité Ennour) / **Omar Arbi** (L.Appolo Rades) **Omri Slah**(L.Foussana) / **Moncef Bouchahoua**(L.Mahrajene Tataouine)
Noureddine Ghandour(L.Mahrajene Tt[illegible]) **M[illegible] A[illegible]ddala**(L.Smar Tataouine)