EXO N°1 : (ENONCE)

Soit la suite $\left(U_n\right)$ définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

1°/ a / Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire U_0

b / Calculer U_1

2°/ a / Prouver que la suite $\left(U_n\right)$ est décroissante (on ne cherchera pas à calculer U_n)

En déduire que la suite $\left(U_n\right)$ est convergente.

b / Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$ on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ (1)

Déterminer la limite de $\left(U_n\right)$

3°/ Pour tout entier $n \geq 3$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a / Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

Par une intégration par paries portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$$

b / En déduire que pour tout entier $n \geq 3$ on a: $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ (2)

c / A l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite $\left(nU_n\right)$ est convergente et calculer sa limite

FATNASSI BECHIR

<u>EXO N°1</u> : (SOLUTION)

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et , pour $n \geq 1$, par $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1°/ a / Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$ soit $U_0 = \mathrm{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$

b / $U_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ de la forme $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \left(\sqrt{u(x)}\right)'$ avec $u(x) = x^2+1$

Une primitive sur $[0;1]$ de la fonction continue $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$

$U_1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$ soit $U_1 = \sqrt{2} - 1$

2°/ a / Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

D'après la linéarité de l'intégration, nous pouvons écrire :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Or, pour $x \in [0;1]$, $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$

Donc, pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$ et l'intégrale sur $[0;1]$ d'une fonction négative sur $[0;1]$ est un réel négatif. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

De plus, pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et positive (donc minorée par 0), elle est donc convergente.

b / $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est une fonction croissante sur $[0;1]$

Il s'ensuit que si $0 \leq x \leq 1$

$$g(0) \leq g(x) \leq g(1) \text{ avec } g(0) = 1 \text{ et } g(1) = \sqrt{2}$$

D'ou : pour tout $x \in [0;1]$, $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

De l'inégalité précédente, nous déduisons : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ or $x^n \geq 0$, pour $x \in [0;1]$

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^n dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^n dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{n+1} \\ \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Nous avons $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ nous en déduisons : $\lim_{x \to +\infty} U_n = 0$

3°/ Pour tout entier $n \geq 3$, $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\, dx$

a / Pour tout entier $n \geq 3$, $U_n + U_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} dx$; Or $\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$ pour tout réel x

Pour tout entier $n \geq 3$, $U_n + U_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\, dx$

$$U_n + U_{n-2} = I_n$$

Effectuons une intégration par parties portant sur I_n en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x^2+1} \\ v'(x) = x^{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1} \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 3$, nous avons, $I_n = \left[\frac{1}{n-1} x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{xx^{n-1}}{(n-1)\sqrt{x^2+1}} dx$

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ ; or } U_n + U_{n-2} = I_n$$

Donc, pour tout entier $n \geq 3$, $U_n + U_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1} U_n$

$$\Leftrightarrow (n-1)U_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2} - U_n$$

$$\Leftrightarrow (n-1)U_n + U_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$$

b / La suite (U_n) étant décroissante, nous avons : pour tout entier $n \geq 3$; $U_{n-2} \geq U_n$

$(n-1)U_{n-2} \geq (n-1)U_n$ or $(n-1)U_{n-2} = \sqrt{2} - nU_n$

D'après la question précédente pour tout entier $n \geq 3$, $\sqrt{2} - nU_n \geq (n-1)U_n$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \geq nU_n + (n-1)U_n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \geq (2n-1)U_n$$

Nous en déduisons : pour tout entier $n \geq 3$; $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ (2).

c / Pour tout entier $n \geq 1,$ $\quad \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nU_n \leq \dfrac{n}{n+1}$ d'après (1).

$$0 \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$$ d'après (2).

$$0 \leq nU_n \leq \frac{n}{2n-1}\sqrt{2}$$

On en déduit pour tout entier $n \geq 1,$ $0 \leq \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nU_n \leq \dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

Les suites $\left(\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1}\right)$ convergent toutes les deux vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

donc la suite (nU_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

<u>Prof. Mr. FATNASSI BECHIR</u>

<u>LYCEE SECONDAIRE DE KORBA</u>

FATNASSI BECHIR