Exo. n°7 : (Enoncé)

Une urne contient 10 boules indiscernables. 5 rouges ; 3 jaunes et 2 vertes.

I / On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles

1°/ Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « Les trois boules sont de la même couleur »

B : « Les trois boules sont rouges »

C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente »

2°/ On appelle X l'alea numérique qui a chaque tirage associe le nombre de couleur obtenues.

a / Déterminer la loi de probabilité de X.

b / Calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$

II / Dans cette question on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges ou n est un entier supérieur on égal à 2. L'urne contient donc $(n+5)$ boules : n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

Soit les événements suivants : D « Tirer deux boules rouges »

E « Tirer deux boules de la même couleur »

1°/ Montrer que $p(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

2°/ Calculer $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p(E)\geq\dfrac{1}{2}$

Exo. n°7 : (SOLUTION)

L'urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont cinq rouges trois jaunes et deux vertes.
On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1°/ Le nombre total de tirages possibles est le nombre de parties de 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments c'est le nombre de combinaisons de 3 éléments de 10 éléments : $C_{10}^{3}=120$

$p(A)=p(\{3R,3J\})=\dfrac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{10+1}{120}=\dfrac{11}{120}$ (On ne peut pas avoir 3 vertes car on a que 2 vertes)

$p(B)=p(\{3R\})=\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$

$p(C)=p(\{1R,1J \text{ et } 1V\})=\dfrac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{5\times3\times2}{120}=\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$

2°/ a / X est l'aléa numérique qui après le tirage de trois boules associe le nombre de couleurs obtenu : Il peut y avoir une couleur (Obtenir trois boules de même couleur), deux couleurs (Obtenir deux boules de même couleur et une boules d'une autre couleur) ou trois couleurs (Obtenir trois boules de couleurs différentes)

Donc : Les valeurs prises par X sont : **1 , 2 , 3** $X(\Omega)=\{1\,,2\,,3\}$

$$p(X=1)=p(A)=p(\{3R,3J\})=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{10+1}{120}=\frac{11}{120}$$

$$p(X=2)=p(\{2\text{R et }1\text{J ou }2\text{R et }1\text{V ou }2\text{J et }1\text{R ou }2\text{J et }1\text{V ou }2\text{V et }1\text{R ou }2\text{V et }1\text{J}\})$$

$$=\frac{C_5^2\times C_3^1+C_5^2\times C_2^1+C_3^2\times C_5^1+C_3^2\times C_2^1+C_2^2\times C_5^1+C_2^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}$$

$$p(X=3)=p(C)=p(\{1R,1J\text{ et }1V\})=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{5\times3\times2}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

La loi de probabilité de X est donnée par :

$\mathbf{x_i}$	**1**	**2**	**3**
$\mathbf{p\,(X=x_i)}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

b / $*$ L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X)=1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+3\times p(X=3)\Leftrightarrow E(X)=1\times\frac{11}{120}+2\times\frac{79}{120}+3\times\frac{30}{120}=\frac{259}{120}$$

$*$ La variance de X est : $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

Avec : $E(X^2)=(1)^2\times p(X=1)+(2)^2\times p(X=2)+(3)^2\times p(X=3)$

$$=\frac{(1\times11)+(4\times79)+(9\times30)}{120}=\frac{597}{120}$$

D'où : $V(X)=\frac{597}{120}-\left(\frac{259}{120}\right)^2=0{,}317$

$*$ L'écart type de X est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\simeq 0{,}56$

II / Le nombre de façon de tirer simultanément deux boules de l'urne contenant (n+5) boules est :

$$\text{Card}(\Omega)=C_{n+5}^2=\frac{(n+5)!}{2!(n+5-2)!}=\frac{(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}}{2\cancel{(n+3)!}}=\frac{(n+5)(n+4)}{2}$$

1°/ On a n boules rouges , le nombre de façon ,de tirer simultanément deux boules rouges est égale à $\text{Card}(D)=C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}}=\frac{n(n-1)}{2}$

Donc : $p(D)=\frac{\text{Card}(D)}{\text{Caed}(\Omega)}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

2°/ $* \ E=\{2R \text{ ou } 2J \text{ ou } 2V\}$ **D'où :** $\text{Card}(E)=C_n^2+C_3^2+C_2^2=\dfrac{n(n-1)}{2}+3+1=\dfrac{n(n-1)+8}{2}$

Donc : $p(E)=\dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Caed}(\Omega)}=\dfrac{n(n-1)+8}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$

$* \quad p(E)\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}-\dfrac{1}{2}\geq 0\Leftrightarrow 2n^2-2n+16-n^2-9n-20\geq 0$

$\Leftrightarrow n^2-11n-4\geq 0$

$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-11 \\ c=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=121+16=137$ les solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $n^2-11n-4=0$

sont : $n'=\dfrac{11-\sqrt{137}}{2}\simeq -0,35$ et $n''=\dfrac{11+\sqrt{137}}{2}\simeq 11,35$

n		n'		n''	
$n^2-11n-4=0$	+	0	−	0	+

Pour $n\geq 12$ c'est-à-dire $n\in\{12,13,14,............\}$ on a : $p(E)\geq\dfrac{1}{2}$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR