LOI CONTINUE

Exo. n°6 : (Enoncé)

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une aléa numérique notée X qui suit la $^{<<}$ loi du durée de vie sans vieillissement $^{>>}$
(ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$)

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} prés.

1°/ Sachant que $p(X > 0) = 0,286$ montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} prés de λ est $0;125$

$*$ On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2°/ Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3°/ Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4°/ On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5°/ Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Rappel

La Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement :

Pour $0 \le a \le b$, $p([a ,b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$ et Pour tout $c \ge 0$, $p([c ,+\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt$.

Exo. n°6 : (SOLUTION)

1°/ On sait que $p(X > 10) = 0,286$ et X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On en déduit que : $1 - \int_0^{10} \lambda e^{\lambda t} dt = 0,286 \Leftrightarrow 1 - \left(1 - e^{-10\lambda}\right) = 0,286 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0,286$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-10\lambda}\right) = \ln(0,286) \Leftrightarrow -10\lambda = \ln(0,286) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{10}\ln(0,286)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0{,}125 \text{ à } 10^{-3} \text{ prés.}$$

2°/ La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois est $p\left(0 \le X < \frac{1}{2}\right)$

et $p\left(0 \le X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \lambda e^{-\lambda t} dt \Leftrightarrow p\left(0 \le X < \frac{1}{2}\right) = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow p\left(0 \le X < \frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{\lambda}{2}} + 1$

C'est – à dire, en utilisant la valeur approchée de λ obtenue à la question précédente,

$$p\left(0 \le X < \frac{1}{2}\right) = 0,061 \text{ à } 10^{-3} \text{prés .}$$

La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois est égale à 10^{-3} **prés**

3°/ La probabilité qu'un appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 8 ans est $p(X>2)$ car X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

Or : $p(X>2)=1-\int_0^2 \lambda e^{-\lambda t}dt \iff p(X>2)=1-\left(1-e^{-2\lambda}\right) \iff p(X>2)=e^{-2\lambda}$

soit $p(X>2)=0,779$ à 10^{-3} prés.

La probabilité qu'un appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 8 ans est égale à 0,779 à 10^{-3} prés **.**

4°/ On sait que la probabilité qu'un appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est $p(X>10)=0,286.$

Puisque les durées de vie des oscilloscopes sont indépendantes, la variable aléatoire Y donnant le nombre d'oscilloscopes (parmi les 15 commandés) ayant une durée de vie supérieure à 10 ans suit la loi binominale $B(15;\ 0,286)$.

On en déduit que, pour tout k entier tel que $0\le k\le 15$, on a :

$$p(Y=k)=C_{15}^{K}\times 0,286^{k}\times(1-0,286)^{15-k} \iff p(Y=k)=C_{15}^{K}\times 0,286^{k}\times 0,714^{15-k}$$

La probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est

$$p(Y\ge 1)=1-p(Y=0) \iff p(Y\ge 1)=1-C_{15}^{0}\times 0,286^{0}\times 0,714^{15}$$

soit $p(Y\ge 1)=0,994$ à 10^{-3} prés.

La probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,994 à 10^{-3} prés.

5°/ Soit n le nombre d'oscilloscope achetés. La probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans est $1-0,714^{n}$.

Cette probabilité est supérieure à 0 ;999 si et seulement si, $1-0,714^{n}>0,999 \iff 0,714^{n}>10^{-3}$

$\iff \ln\left(0,714^{n}\right)<\ln\left(10^{-3}\right)$ car la fonction Log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff n.\ln(0,714)<-3\ln(10)$

$\iff n>-\dfrac{3\ln(10)}{\ln(0,714)}$ car Log $(0,714)<0$ puisque $0,714<1$.

Or $-\dfrac{3\ln(10)}{\ln(0,714)}=20,51$ à 10^{-2} prés, Donc on doit avoir n entier et $n\ge 21$.

L'établissement doit acheter au moins 21 oscilloscopes.

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR