Equation différentielle (bac exp) Mr. FATNASSI BECHIR

EXO (ENONCE)

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x$: où *y* désigne une fonction de la variable réelle *x* définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1°/ Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + y = 0$

2°/ Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ est solution de l'équation (E)

3°/ a / Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (H)

b / En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

4°/ Dans cette question on prend k =1

Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,2]$

EXO (SOLUTION)

1°/ L'équation $(H): y' = -y$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$.

Donc, toutes les solutions de (H) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = k.e^{-x}$ avec k une constante réelle.

2°/ La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = a$

g est une solution de $(E) \Leftrightarrow g'(x) + g(x) = x \Leftrightarrow a + ax + b = x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Donc : pour tout réel x : $g(x) = x - 1$

3°/ a /• on a : $g'(x) + g(x) = x$

- f est une solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = x$
- $f - g$ est une solution de $(H) \Leftrightarrow (f-g)'(x) + (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = g'(x) + g(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = x$

$\Leftrightarrow$ f est une solution de (E)

b / f est une solution de $(E) \Leftrightarrow f - g$ est une solution de (H)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = ke^{-x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + ke^{-x} \Leftrightarrow f(x) = x - 1 + ke^{-x}$

<u>**Conclusion**</u> **:** pour tout réel x : $f(x) = x - 1 + ke^{-x}$ où k est un paramètre réel.

4°/ Dans cette question on prend k =1 donc $f(x) = x - 1 + e^{-x}$

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,2]$ est :

$$\bar{f} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x - 1 + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x - e^{-x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(2 - 2 - e^{-2} + 1\right) = \frac{1 - e^{-2}}{2}.$$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR