GEOMETRIE (bac exp et bac tech) Mr. FATNASSI BECHIR

Exo. n°13' : (Enoncé)

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A\left(-1,2,0\right)$ et $B\left(1,1,2\right)$.

1°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2°/ Soit P et Q les deux plans perpendiculaire à la droite (AB) et passant respectivement par A et B.

a / Montrer que le plan P a pour équation : $2x-y+2z+4=0$

b / Trouver une équation cartésienne du plan Q.

3°/ On considère la sphère S dont l'intersection avec le plan P est le cercle (C) de centre A et de rayon 1 et l'intersection avec le plan Q est le cercle (C') de centre B et de rayon 4.

a / Montrer que le centre I de la sphère S appartient à la droite (AB) et déduire que les coordonnées (a, b, c) de I vérifient : $\begin{cases} a-c=1 \\ c+2b=4 \end{cases}$

b / Montrer que $IA^2-IB^2=15$ puis déduire que $2a-b+2c=8$.

c / Calculer les coordonnées de I. ainsi que le rayon R de S.

d / Donner une équation cartésienne de S.

Exo. n°13' : (Solution)

1°/ On a : $A\left(-1,2,0\right)$ $B\left(1,1,2\right)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$M\left(x,y,z\right)\in\left(AB\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\ (AB):\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=\ \ 2-\alpha \\ z=\ \ 2\alpha \end{cases}\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}$$

2°/ a / La droite (AB) est perpendiculaire à P donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal du plan P.

D'où une équation cartésienne de P est : $2x-y+2z+d=0$

On a : $A\left(-1,2,0\right)\in P\Leftrightarrow -2-2+d=0\Leftrightarrow d=4$.

Conclusion : une équation cartésienne de P est : $2x-y+2y+4=0$

b / De même la droite (AB) est perpendiculaire à Q donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal du plan Q.

D'où une équation cartésienne de Q est : $2x-y+2z+d=0$

On a : $B\left(1,1,2\right)\in Q\Leftrightarrow 2-1+4+d=0\Leftrightarrow d=-5$

Conclusion : une équation cartésienne de Q est :. $2x-y+2z-5=0$

3°/ $P\cap S=C\ \left(A,R=1\right)$ donc A est le projeté orthogonal du centre I de la sphère S sur le plan P.

et $Q\cap S=C'\left(B,R'=4\right)$ donc B est le projeté orthogonal du centre I de la sphère S sur Q.

a / $\left.\begin{matrix}(IA)\perp P\\(AB)\perp P\end{matrix}\right\}$ donc les droites (IA) et (AB) sont parallèles $\Leftrightarrow (IA)=(AB)$ donc $I\in(AB)$

$$I\left(a,b,c\right)\in\left(AB\right)\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1+2\alpha & (1) \\ b=2-\alpha & (2) \\ c=2\alpha & (3) \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} a-c=-1 & (1)-(3) \\ c+2b=4 & (3)+2\times(2) \end{cases}$

b / On a : $\left.\begin{array}{l} IA^2 = R^2 - 1 \\ IB^2 = R^2 - 16 \end{array}\right\}$ donc : $IA^2 - IB^2 = 15$ **.**

On a aussi : $IA^2 - IB^2 = (-1-a)^2 + (2-b)^2 + c^2 - (1-a)^2 - (1-b)^2 - (2-c)^2$

$$= 1 + 2a + a^2 + 4 - 4b + b^2 + c^2 - 1 + 2a - a^2 - 1 + 2b - b^2 - 4 + 4c - c^2 = 4a - 2b + 4c$$

D'où : $IA^2 - 5B^2 = 15 \Leftrightarrow 4a - 2b + 4c = 16 \Leftrightarrow 2a - b + 2c = 8$

c / On a donc en résumé : $\begin{cases} a - c = -1 \\ c + 2b = 4 \\ 2a - b + 2c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c - 1 & (1) \\ b = -\dfrac{1}{2}c + 2 & (2) \\ 2c - 2 + \dfrac{1}{2}c - 2 + 2c = 8 & (3) \end{cases}$

L'équation (3) donne : $\dfrac{9}{2}c = 12 \Leftrightarrow c = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$

(1) donne **:** $a = \dfrac{5}{3}$ **;** (2) donne **:** $b = \dfrac{2}{3}$ **il résulte que : I** $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

On a : $IA = \sqrt{\left(-1-\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(2-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\dfrac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{64}{9} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{64}{9}} = \sqrt{16} = 4$

$R^2 = IA^2 + r^2 = 16 + 1 = 17 \Leftrightarrow R = \sqrt{17}$

S est donc la sphère de centre I $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ **et de rayon R** $= \sqrt{17}$

et d'équation $S : \left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \dfrac{8}{3}\right)^2 = 17$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR