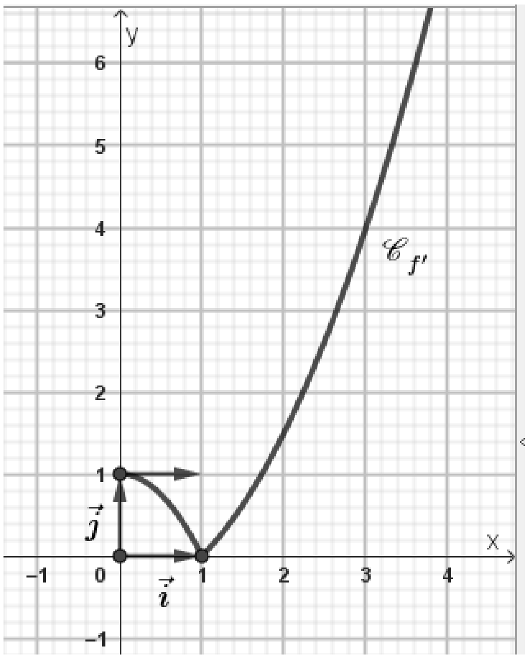
| | |
|---|---|
| *Lycée Ibn Sina Mahdia* | *Profs: GHAZI SFAXI § MOHAMED ZAOUALI.* |
| *Matière : MATHEMATIQUES* | *Devoir de synthèse N°1* |
| *Niveau :Bac maths* | *Durée : 3 heures* — *Date :12/12/2023* |

**Le sujet comporte 4 pages. La page 4 est à rendre avec la copie.**

**<u>Exercice N°1</u>(2.5 points)**




1/Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ dont la fonction dérivée est représentée par la courbe ci-contre.

**Répondre par vrai ou faux en justifiant .**

a)$f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$.

b) Le point I(1,f(1)) est un point d'inflexion de la courbe de $f$.

2/Pour $n$ $entier\ supèrieur$ à 2 on considère la fonction

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R} .$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{tanx}$$

**Répondre par vrai ou faux en justifiant .**

a)La fonction $f_n$ est dérivable à droite en 0.

b)Sachant que $f_n$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x > 0$ ,$\left(f_n{}^{-1}\right)'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$.

**<u>Exercice N°2</u>(5 points)**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $\begin{cases} AB = 2AD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$.

On note $I\ et\ J$ les milieux respectifs des segments $[AB]\ et\ [CD]\ et\ K$ le symétrique de $I$ par rapport à $(DC)$.

1/ On pose $f = S_{(IC)} o t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$ .

a) Caractériser l'isométrie $S_{(BC)} o S_{(IJ)}$ .

b) En déduire que $f$ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2/ Soit $M$ un point de la demi-droite $[BA)$.

La perpendiculaire à la droite $(CM)\ en\ C$ coupe $(IJ)\ en\ N$.

a) Montrer que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$, en déduire la nature du triangle CMN.

b) On pose $x = \widehat{\mathrm{BMC}}$ avec $M \neq B$ et $M \neq I$. Montrer que : $\tan(\widehat{\mathrm{BMN}}) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

En déduire la position de $M$ pour laquelle $tan(\widehat{BMN}) = 3$.

3/ On pose $g = t_{\overrightarrow{IK}} o S_{(IC)}$ .

a) Caractériser l'isométrie $g o S_{(AJ)}$.
b) En déduire que $g$ est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4/ Soit $\varphi$ une isométrie qui fixe un point de la droite $(AB)$ et qui transforme $(AB)$ en $(IJ)$.

a)Montrer que $\varphi$ fixe le point $I$.

b)Déterminer alors toutes les isométries $\varphi$.

**<u>Exercice N°3</u>(4,5 points)**

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

**A/** 1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - i(2 - e^{i\alpha})z + e^{i\alpha} - 1 = 0. (\alpha \text{ étant un réel de } ]0,2\pi[)$.

2/ Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

**B/** Soit l'application $f : \mathcal{P} \setminus \{B\} \to \mathcal{P}$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}.$$

1/ a) Montrer que $f$ n'admet aucun point invariant.

b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ ; $z' - 1 = \frac{-2i}{\bar{z} + i}$.

c) En déduire que pour tout point $M$ de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ $on\ a : AM' \times BM = 2\ et\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

d)Dans la figure de l'annexe ci-jointe on a placé un point $M$ sur le cercle $(\mathcal{C})$ centre $B$ et de rayon 1.Construire le point $M'$ associé.

2/Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ :$(\bar{z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)$.

a) Montrer que si $z$ est solution de l'équation $(E)$ alors $z$ est réel.

b) Montrer l'équivalence : $z' = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = -cot(\frac{\alpha}{2})$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

d) Utiliser ce qui précède pour construire sur la même figure le point $\Omega$ antécédent par $f$ du point $\Omega'$ d'affixe $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**<u>Exercice N°4</u>(8 points)**

**A**/Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}} & si\ x \in\ ]-\infty, 0] \\ f(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} & si\ x \in\ ]0, +\infty[ \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/a) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

2/a) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$, une solution unique $\alpha$ et que $\alpha \in ]\frac{3}{2}, 2[$.

b)Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

3/a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I = ]0,2[$.

b)Soit $g$ la bijection réciproque de $f$.Expliciter $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $]1,2[$.

c)Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de $g$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ *Soit* $(U_n)$ *la suite réelle définie sur* $\mathbb{N}$ *par* : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n < \alpha$.

b) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)$.

c)En déduire que $(U_n)$ est convergente et trouver sa limite.

**B**/Soit $F$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\begin{cases} F(x) = f(-2\tan^2(\pi x)) & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$.

1/a) Montrer que $F$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $F(x) = 1 - \sin(\pi x)$.

c) Dresser le tableau de variation de $F$.

2/a) Montrer que $F$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

b) Soit $G$ la bijection réciproque de $F$.

Montrer que $G$ est dérivable sur $]0,1]$ et que $G'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$.

3/Pour tout réel $x$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $H(x) = G(1 - \sin x) + G(1 - \cos x)$.

a) Montrer que $H$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que $H$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

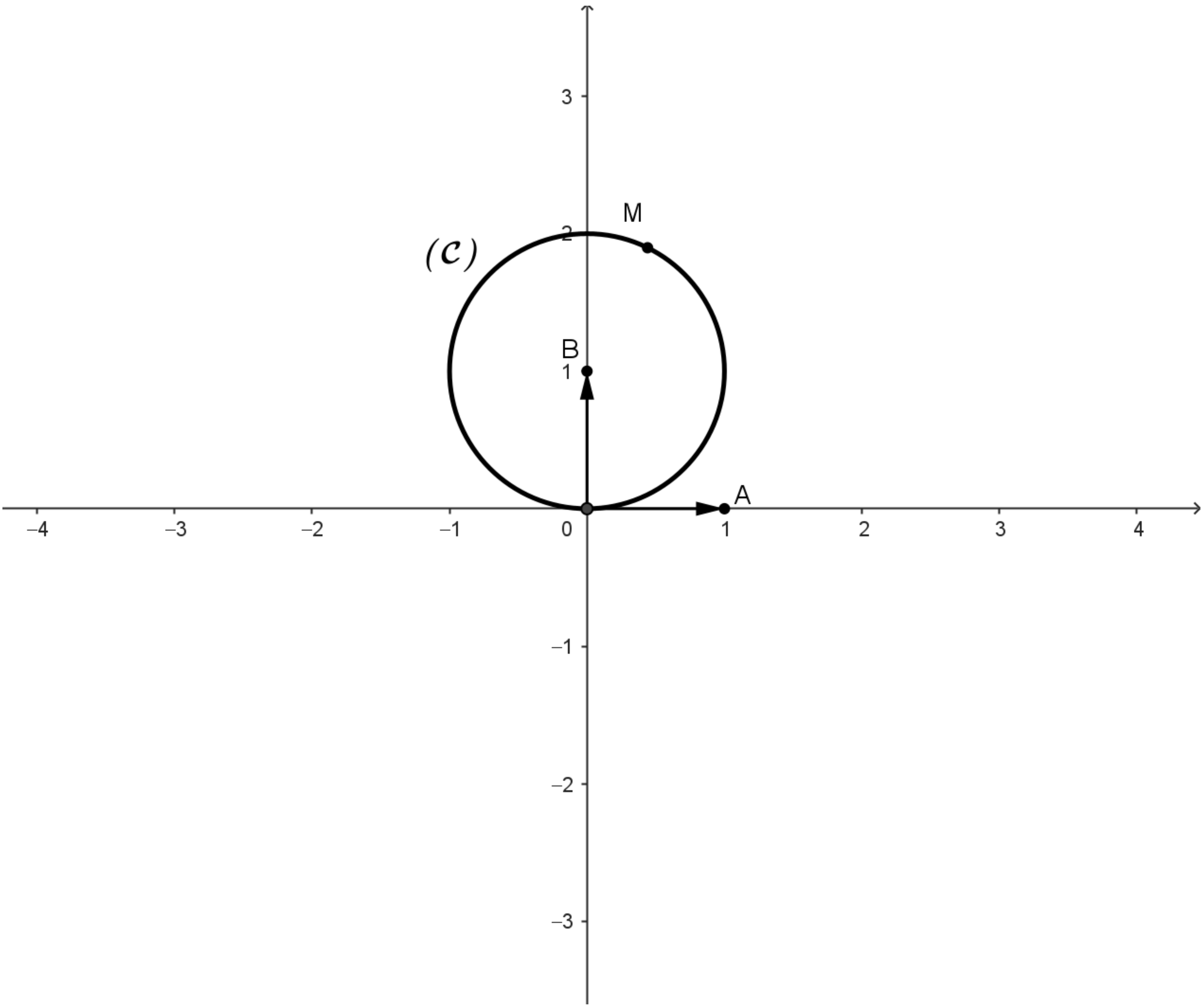
c) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $2G(1 - sinx) + 2G(1 - cosx) - 1 = 0$.

***Annexe à rendre avec la copie***

***Nom et prénom :***……………………………………………………….

***Classe :4ème Maths***......

**Exercice 3**



M
(C)
B
A