Prof : Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. (Complexe bac scientifique)

EXO. : (Enoncé)

Soit α un réel de l'intervalle : $[\,0\,,\,\pi\,[$ et soit le nombre complexe : $Z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$

1°/ Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : Z, $\overline{Z}$, $-Z$ et $\frac{1}{Z}$

2°/ Déterminer la forme exponentielle des racines carrées de Z, de $\overline{Z}$ et $-Z$

EXO. : (Solution)

1°/ $Z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}} = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times e^{i\frac{\alpha}{2}}$

On parvient au même résultat lorsqu'on applique les formules trigonométriques :

$$\begin{cases} 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\alpha = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow Z = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

D'où $Z = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

Or $0 \le \alpha < \pi \;\Rightarrow\; 0 \le \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ donc $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ est la forme exponentielle de Z

2°/ $$Z = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{Z} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\frac{\alpha}{2}} \\ -Z = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)} \\ \frac{1}{Z} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$Z = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z = \left(\sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{i\frac{\alpha}{4}}\right)^2$$

Donc les racines carrées de Z sont : $u = \sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{i\frac{\alpha}{4}}$ et $-u = \sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{i\left(\frac{\alpha}{4}+\pi\right)}$

On détermine simplement les racines carrées de $\overline{Z}$ et $-Z$ à partir de ceux de Z

En effet :

$$\begin{cases} u^2 = Z \Leftrightarrow \overline{u^2} = \overline{Z} \Leftrightarrow \left(\overline{u}\right)^2 = \overline{Z} \text{ donc les racines carrées de } \overline{Z} \text{ sont :} \\ \overline{u} = \sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{-i\frac{\alpha}{4}} \text{ et } -\overline{u} = -\sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{-i\frac{\alpha}{4}} = \sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{i\left(\pi-\frac{\alpha}{4}\right)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 = Z \Leftrightarrow (i\times u)^2 = -Z \text{ donc les racines carrées de } -Z \text{ sont :} \\ i\times u = \sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{i\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad -i\times u = \sqrt{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\;e^{i\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} \end{cases}$$

FATNASSI BECHIR