## Exo. n°3 : ( Enoncé )

Le plan P complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient les points A , B , C et D d'affixes respectives : $z_A=-2i$ ; $z_B=4-2i$ ; $z_C=4+2i$ et $z_D=1$

**1°/ a /** placer les points A , B , C, D.

**b /** Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

**2°/** Soit f l'application de P \ $\{A\}$ dans P qui au point M d'affixe Z associe le point d'affixe

$$z'=\frac{z-4-2i}{z+2i}$$

**a /** Ecrire sous forme algébrique les affixes des points : $O'=f(O)$ et $D'=f(D)$.

**b /** Déterminer l'ensemble E = $\left\{ M(z) \text{ tel que : } |z'|=1 \right\}$.

**c** / Déterminer l'ensemble $F=\left\{ M(z) \text{ tel que : } z'\in\mathbb{R} \right\}$.

**d /** Montrer que : $\left(z'-1\right)(z+2i)=-4-4i$

**e** / Montrer que pour tout M de P distincts de A on a :

$$M'\neq D \text{ et } DM'\times AM=4\sqrt{2}. \quad ; \quad \left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{DM'}\right)+(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AM})\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi].$$

## Exo. n°3 : ( Solution )

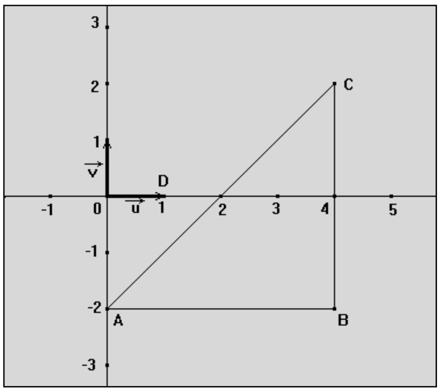
**1°/ a /**

$z_A=-2i \Rightarrow A(0,-2)$

$z_B=4-2i\Rightarrow B\left(4,-2\right)$

$z_C=4+2i\Rightarrow C\left(4,2\right)$

$z_D=1\Rightarrow D\left(1,0\right)$




**b / On a :** $AB=|z_B-z_A|=|4-2i+2i|=4$

$$AC=|z_C-z_A|=|4+2i+2i|=|4+4i|=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|4+2i-4+2i|=|4i|=4$$

**d'où** $\begin{cases} BA=BC=4 \\ BA^2+BC^2=16+16=32=AC^2 \end{cases}$ **donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.**

**2°/** Pour tout $z \neq -2i$ on a : $f(M)=M' \Leftrightarrow z'=\dfrac{z-4-2i}{z+2i}$ .

**a /** $*\ f(O)=O' \Leftrightarrow z_{O'}=\dfrac{z_O-4-2i}{z_O+2i}=\dfrac{-4-2i}{2i}=\dfrac{(-2-i)(-i)}{(i)(-i)}=-1+2i$

$$* \ f(D)=D' \Leftrightarrow z_{D'}=\dfrac{z_D-4-2i}{z_D+2i}=\dfrac{1-4-2i}{1+2i}=\dfrac{-3-2i}{1+2i}=\dfrac{(-3-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$=\dfrac{-3+6i-2i-4}{1^2+2^2}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{4}{5}i$$

**b /** $M \in E \Leftrightarrow |z'|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-4-2i}{z+2i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-4-2i|=|z+2i|$

$*1^{\text{ère}}$ méthode : $|z-4-2i|=|z+2i| \Leftrightarrow |z-(4+2i)|=|z-(-2i)| \Leftrightarrow |z_M-z_C|=|z_M-z_A| \Leftrightarrow CM=AM$

**Donc** $E$ **est la médiatrice du segment** $[AC]$

$*2^{\text{ème}}$ méthode : $|z-4-2i|=|z+2i| \Leftrightarrow |(x-4)+i(y-2|=|x+i(y+2)|$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=x^2+(y+2)^2 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2+y^2+4y+4 \Leftrightarrow x+y-2=0$$

**Donc** $E$ **est la droite** $\Delta$ **d'équation :** $x+y-2=0$.

**c /** $M \in F \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z'=\overline{z'} \Leftrightarrow \dfrac{z-4-2i}{z+2i}=\dfrac{\overline{z}-4+2i}{\overline{z}-2i}$

$$\Leftrightarrow (z-4-2i)\left(\overline{z}-2i\right)=\left(\overline{z}-4+2i\right)(z+2i)$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}-2iz-4\overline{z}+8i-2i\overline{z}-4=z\overline{z}+2i\overline{z}-4z-8i+2iz-4 \Leftrightarrow -4i(z+\overline{z})+4(z-\overline{z})+16i=0$$

$$\Leftrightarrow -4i(2x)+4(2iy)+16i=0 \Leftrightarrow 8i(-x+y+2)=0 \Leftrightarrow -x+y+2=0$$

**Donc** $F$ **est la droite** $\Delta'$ **d'équation :** $-x+y+2=0$ **privé du point A(** $0,-2$ **)**

**d /** Pour tout $z \neq -2i$ on a : $(z'-1)(z+2i)=\left(\dfrac{z-4-2i}{z+2i}-1\right)(z+2i)=\left(\dfrac{z-4-2i-z-2i}{\cancel{z+2i}}\right)\left(\cancel{z+2i}\right)$

$$=-4-4i$$

**e /** $DM' \times AM=|z'-1| \times |z+2i|=|(z'-1)(z+2i)|=|-4-4i|=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right)+\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z'-1)+\operatorname{Arg}(z+2i)\,[2\pi] \equiv \operatorname{Arg}\left((z'-1)(z+2i)\right)[2\pi]$$

$$\equiv \operatorname{Arg}(-4-4i)[2\pi] \equiv \dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$$

**D'ailleurs :** $-4-4i=4\sqrt{2}\left(-\dfrac{4}{4\sqrt{2}}-\dfrac{4}{4\sqrt{2}}i\right)=4\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4\sqrt{2}\ e^{i\frac{5\pi}{4}}$