Exercice 1

Soit la fonction f définie sur I =] 0,1[par : $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$.

On désigne par (Cf) la courbe représentative de f un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

A- **1)** a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout x de I, $f'(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x-x^2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau variation de f.

2) a) Déterminer f ''(x) et montrer que (Cf) admet un point d'inflexion I au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

b) Ecrire l'équation de la tangente T à (Cf) au point I.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) En annexe (1) , on donne Cf la représentation graphique de f, tracer la courbe (C') de f^{-1}.

c) Montrer que pour tout réel x de J , $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}$

B-

Soit h la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ $par\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{f\left(\frac{1+\cos(x)}{2}\right)} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que g est continue à droite en 0

b) Montrer que pour tout x $\in[0,\frac{\pi}{2}[$;g(x) = tan (x).

c) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,+\infty[$

2) a) Soit φ la fonction réciproque de g. Calculer φ (0) ; φ (1) et $\varphi(\sqrt{3})$.

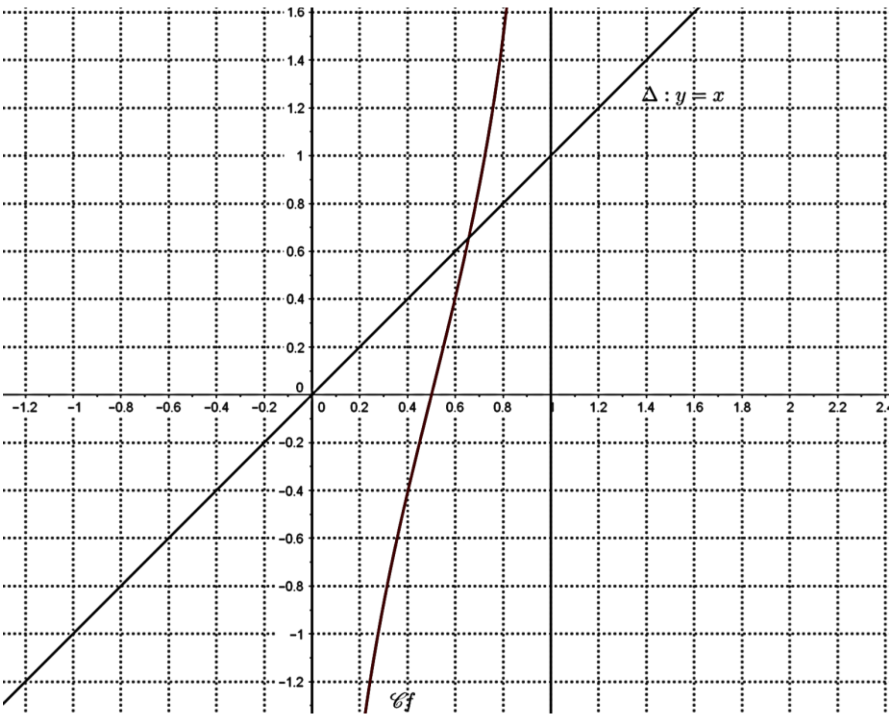
b) Montrer que φ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout x de $[0,+\infty[$; $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3) On pose $k(x) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$; x > 0.

a) Montrer que k est dérivable sur$]0;+\infty[$ et Calculer k'(x) pour tout x > 0.

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Annexe (1)



Exercice 2 Lecture graphique

En annexe (2)est tracée la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR notée $\mathcal{C}f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

-La droite d'équation y = 1 est asymptote à la courbe $\mathcal{C}f$ en + ∞

-La courbe $\mathcal{C}f$ admet deux demi tangentes à la courbe $\mathcal{C}f$ aux points A et B

-La droite D d'équation y = -0.46x-0.17 est , une tangente au point C à la courbe $\mathcal{C}f$

A-

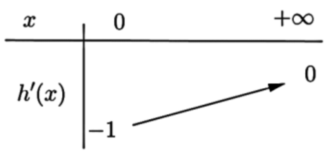
1. Dresser le tableau de variation de f sur IR
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
3. Déterminer $f_d'(0)$ et donner l'équation de la tangente à Cf à droite du point A
4. Justifier que C est un point d'inflexion à C f
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;-1]$ définie par $f(x) = \sqrt{-x-1} + \frac{1}{4}(x^2+4x+3)$
   a. Etudier la dérivabilité de g à gauche en -1. Interpréter
   b. Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty;-1]$ sur un intervalle J que l'on précisera
   c. Prouver que g^{-1} est dérivable à droite en 0 et donner $\left(g_d^{-1}\right)'(0)$

B- Dans cette partie, on désigne par h la restriction de f sur [0,+∞[et h' sa fonction dérivée définie sur [0,+∞[

On admet que les points S (1 ; 1,37) et T (2 ; 1.14) appartiennent à la courbe de la fonction h

les points H (1 ; -0.37) et K (2 ; -0.14) appartiennent à la courbe de la fonction h' la dérivée de h

On donne aussi le tableau de variation de la fonction h' dérivée de h



1) a)Montrer que pour tout réel $x \in [1;2]$, $h(x) \in [1;2]$

b) Montrer que pour tout réel $x \in [1;2]$, $|h'(x)| \le 0.37$

c) Montrer que l'équation h(x) = x admet une solution unique ∝ dans $[1;2]$

2) on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [1,2] \text{ et } u_0 \neq \alpha \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

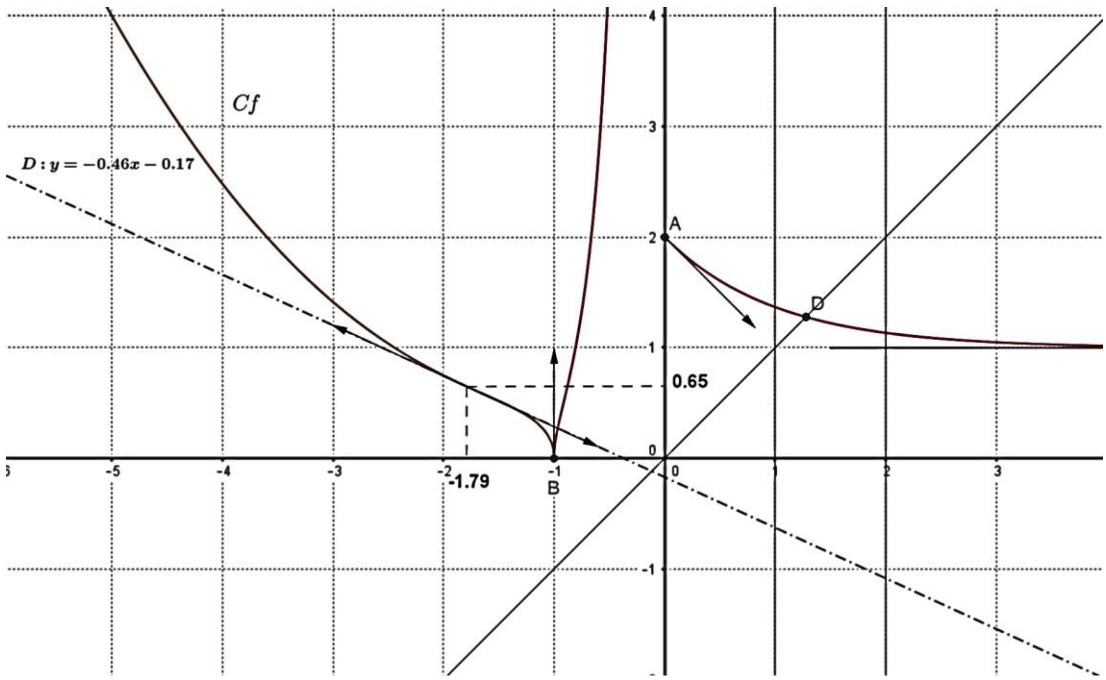
a) Montrer que pour tout entier naturel $1 \le u_n \le 2$

b) Montrer que pour tout entier naturel, $|u_{n+1} - \alpha| \le 0.37|u_n - \alpha|$

c. En déduire par récurrence, que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le (0.37)^n |u_0 - \alpha|$

d. En déduire la limite de la suite u_n

Annexe(2)



Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5\,u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$

1)a)Calculer U_1 et U_2

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \succ 2$

2)a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$

b) En déduire la monotonie la suite u_n

c) En déduire que la suite u_n est convergente et déterminer sa limite

3) On considère la suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Prouver que (a_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et donner son premier terme

b) Exprimer (a_n) en fonction de n .

4) On pose pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{3a_k u_k}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \dfrac{64}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)$ Montrer que S'_n est divergente

Exercice n°4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \vec{v})$

Soit dans $\mathbb{C}$,l'équation: (E_θ): $z^2 - 2z - 2isin\theta e^{i\theta} = 0$ $,\theta \in]0, \pi[$,

1. a- Montrer que : . $1 + 2isin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

2. Soit $f\ (z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - isin\theta e^{i\theta})z + 4isin\theta e^{i\theta}$

a. Calculer . $f(2)$

b. Vérifier que $f(z) = (z-2)\ (z^2 + bz + c)$ où b et c sont deux nombres complexes à déterminer.

c. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$. f(z) = 0

3. On désigne par *A*,*B* et *C* les points d'affixes : 2, $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$

a. Montrer que :*OBAC* est un rectangle.

b. Déterminer θ pour que *OBAC* soit un carré.