Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** Mathématiques	Classes : 4 ème Sc exp 1+3
Date : 04 / 12 / 2018	Profs : Mme Turki N & Mr Meddeb T	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (6 pts)

1) $a/$ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$(E): z^2 - 2iz - 2 = 0.$$

$b/$ Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $[0;2\pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E_\theta): z^2 - 2iz - 2\cos\theta e^{i\theta} = 0$.

$a/$ Vérifier que : $-1 + 2\cos\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta}$.

$b/$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère las points A, B, M et N d'affixes respectives i, $2i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$.

$a/$ Montrer que lorsque θ varie dans $[0;2\pi[$, le point M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on précisera le rayon.

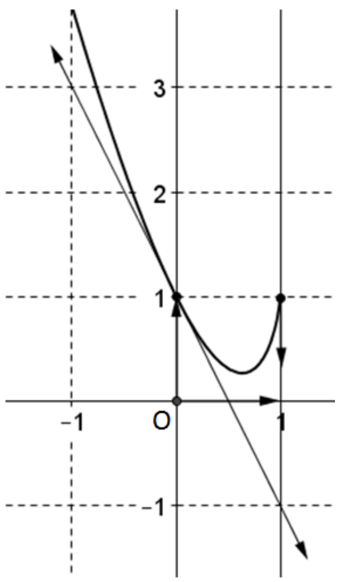
$b/$ Vérifier que $[MN]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$.

$c/$ Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les points O, A et M soient alignés.

$d/$ Montrer alors que, lorsque $\theta \in [0;2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$, le quadrilatère $OMBN$ est un rectangle.

Exercice n°2 : (5 pts)

On donne sur le graphique ci-contre la représentation graphique d'une fonction f continue sur $]-\infty;1]$ dérivable sur $]-\infty;1[$.



1) $a/$ En utilisant le graphique, déterminer $f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1}$.

$b/$ Justifier l'existence d'un réel $\alpha \in [0;1]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

2) Soit g la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

Montrer que g est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ et déterminer $g(]-2;+\infty[)$.

3) Soit h la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par : $h(x) = f \circ g(x)$.

$a/$ Montrer que h est dérivable sur $]-2;+\infty[$.

$b/$ Calculer $h'(1)$.

Exercice n°3 : (9 pts)

1) Soit f la fonction sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3}{3+2x}$.

$a/$ Etudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ et déterminer $f([0,+\infty[)$.

$b/$ Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet dans $[0,1]$ une solution unique α.

2) Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0>0 \\ U_{n+1}=f(U_n) \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

$a/$ Déterminer la valeur de U_0 pour laquelle la suite U est constante.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que $U_0=1$.

$b/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, $0<U_n\le 1$.

$c/$ Sans faire de calcul, montrer que $U_1<\alpha$ et que $U_2>\alpha$.

La suite U est-elle monotone ?

3) Pour tout $n\in IN$, on pose $V_n=U_{2n}$ et $W_n=U_{2n+1}$.

$a/$ Montrer que pour tout $n\in IN$, $V_{n+1}=f\circ f(V_n)$.

$b/$ Montrer par récurrence que, pour tout $n\in IN$, $V_{n+1}<V_n$.

$c/$ En déduire que la suite V est convergente vers α. Où α est le réel définie dans 1).

$d/$ En remarquant que $W_n=f(V_n)$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $|f'(x)|\le\dfrac{2}{3}$.

$b/$ En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :

pour tout $n\in IN$, $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$.

$c/$ En déduire que, pour tout $n\in IN$, $|U_n-\alpha|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

$d/$ Retrouver alors la limite de la suite U.

Bonne chance