Lycee Nahj El Menzeh Beni Khalled	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1**	**PR : KADDOUR** ABDELHAMID NIVEAU :4è SC Durée 2h

EXERCICE N°1 (5points)

1) a)Vérifier que $(2+2i)^2 = 8i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2(1+i)z - 6i = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé ($O, \vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = 3 + 3i$, $z_B = -1 - i$ *et*

$z_C = (1 - 2\sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3})i$

a) Vérifier que $z_C - z_A = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B - z_A)$

b)Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral

3)Soit le point Ω d'affixe $z_\Omega = 1 + i$ et le point D symétrique du point C par rapport à Ω

a) Vérifier que Ω est le milieu de [AB]

b) Placer les point A , B ,Ω ,C et D

c) Montrer que le quadrilatère ACBD est un losange

d) Calculer l'aire de ce losange

EXERCICE N°2 (5points)

1°) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + x - 1$

a) Dresse le tableau de variation de g et montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans IR une unique solution α

b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés

c) Déduire le signe de g(x) sur IR

2°) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2+1}}$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$)

a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresse le tableau de variation de f

c) Démontrer que les droites D: y = -x +1 et D' : y = x - 1 sont les asymptotes de (C) respectivement au voisinage de $(-\infty)$ et $(+\infty)$

d) Construire la courbe (C)

3°) Soit h la restriction de f à $[1, +\infty[$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1}

b) Construire la courbe de h^{-1} dans le même repère

EXERCICE N°3 (5points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points D (0 , 2 , 0) , F (1 , 0 , 1) , G (1 , 2 , 1) , H (0 , 2 , 1) et I le milieu du segment [AD]

1) Montrer que les points G , F , I , H ne sont pas coplanaires
2) Montrer que le volume du tétraèdre GFIH est égal à 1/3

3) a) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I
   b) Donner une équation cartésienne du plan (FIH)
   c) Calculer par deux méthodes la distance du point G au plan (FIH)
   d) Soit L le projeté de G sur le plan (FIH) , déterminer les coordonnées de L

4) a) Donner un système d'équation paramétrique de la droite (AG)
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et (FIH)

EXERCICEN°4 (5points)

Soient a et b deux réels tels que 0 < a < b , on définie les deux suites u et v par

$$\begin{cases} U_0 = a \quad , \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ \\ V_0 = b \quad , \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n < v_n$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes

4) Soit (w_n) la suite définie sur N par $w_n = v_n - u_n$
   a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $w_{n+1} < \frac{1}{2} w_n$
   b) Déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite α

5) Montrer que la suite (t_n)définie par $t_n = u_n . v_n$ est constante , déduire α

EXERCICE N°1 (7 points)

1°) Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = x^3 + x - 1$

a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans R

b- Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés

c- Déduire le signe de $g(x)$

2°)Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

On designer par (C) la courbe representative de f dans un repère orthonormé (o,i,j)

a - Montrer que f est dérivable sur R et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{(x^2+1)}}$

$x^2 + 1$

d- Dresser le tableau de variation de f

3°) Démontrer que les droites D : $y = -x + 1$ et Δ : $y = x - 1$

sont les asymptotes de C respectivement au voisinage de $(+\infty)$et $(-\infty)$

4°) Construire (C)

5°) Soit h la restriction de f à $[1, +\infty[$

a - Montrer que h admet une fonction réciproque

b - Construire la courbe de h^{-1} dans le même repère