

# DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Mathématiques  
Janvier 2017

LYCEE IBN CHARAF de THALA  
Professeur : Hani SAYHI

Classes : 4<sup>ème</sup> sc2  
Durée : 2 heures

Le devoir comporte 3 pages. La page 3/3 est à rendre avec la copie d'examen.

## Exercice n°1 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $IR$  par :  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

- Montrer que  $f$  est définie sur  $[0; 1[$
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0.
  - Interpréter graphiquement le résultat.
- Montrer que  $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$ , pour tout  $x \in ]0; 1[$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0; 1[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- Calculer  $f^{-1}(0)$ .
  - Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J^*$ .
  - Calculer  $(f^{-1})'(1)$ .
  - Expliciter  $(f^{-1})(x)$ , pour tout réel  $x$  de  $J$ .
- Tracer les courbes de  $f$  et de  $f^{-1}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## Exercice n°2 :

Dans l'annexe ci-jointe,  $C_f$  est la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $IR$  qui a la droite une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Par une lecture graphique, déterminer :
  - $f(3)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$  et  $f'(3)$ .
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x)-2}{x+1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x)-2}{x+1}$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1}$
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $IR$ .
  - Déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[-3; -1]$ 
  - Justifier que  $g$  est une bijection de  $[-3; -1]$  sur un intervalle  $K$  à déterminer.
  - Tracer avec une autre couleur la courbe  $C_{g^{-1}}$  de  $g^{-1}$  dans le même repère.

### Exercice n°3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $S$  la sphère dont une équation cartésienne est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 19 = 0$$

1. Déterminer le centre  $I$  et le rayon de  $S$ .
2. Soit  $m$  un paramètre réel et  $P_m$  le plan d'équation :  $x - 2y - 2z + m = 0$ .
  - a) Déterminer suivant les valeurs de  $m$  la position relative de  $P_m$  et  $S$ .
  - b) Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquels  $P_m$  et  $S$  sont sécants suivant un cercle de rayon 4.
  - c) Montrer que  $P_2 \cap S$  est un cercle  $(C)$  de centre  $H(0; 1; 0)$ .
3. Soit  $D$  la droite passant par  $A(-4; -2; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$ 
  - a) Calculer la distance  $d(H, D)$ .
  - b) Montrer que  $D$  et  $P_m$  sont parallèles pour tout réel  $m$ .
  - c) Déterminer la valeur de  $m$  pour que  $D \subset P_m$ .
  - d) En déduire la position de  $D$  et  $(C)$ .

### Exercice n°4 :

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 - (1 + 3i)z - 4 = 0$ .
- 2) On considère l'équation  $(E) : z^3 - (1 + i)z^2 - (2i - 2)z - 8i = 0$ .
  - a) Montrer que l'équation  $(E)$  possède une solution imaginaire pure qu'on notera  $z_0$ .
  - b) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :

$$z^3 - (1 + i)z^2 - (2i - 2)z - 8i = (z + 2i)(z^2 + az + b)$$

- c) Résoudre alors  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$ .
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives :  $Z_A = -1 + i$ ,  $Z_B = -2i$  et  $Z_C = 2 + 2i$ .
  - a) Ecrire sous forme exponentielle  $Z_A$ ,  $Z_B$  et  $Z_C$ .
  - b) Déterminer  $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$ .
  - c) En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
- 4) On considère les points  $E$  et  $D$  tels que  $ABEC$  et  $ABCD$  soient deux parallélogrammes.
  - a) Déterminer  $Z_E$  et  $Z_D$ .
  - b) Prouver que les points  $E$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés.

FEUILLE A RENDRE AVEC LA COPIE D'EXAMEN

Nom et Prénom : .....

