

**EXERCICE N° 1(5points)**

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $2z^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)z + 1 + \sqrt{3}i = 0$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E') :  $2Z^6 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i)Z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0$
- 3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A et B d'affixe respectives  $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  et  $z_B = iz_A$ . Soit I le milieu de [AB]
  - a) Donner la forme exponentielle de  $z_A$  et  $z_B$
  - b) Placer les points A, B, et I dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- 4) a) Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle et isocèle
  - b) En déduire que  $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$
- c) Ecrire  $z_I$  sous la forme algébrique et en déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$

**EXERCICE N°2 (5points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit les points A, B, et C d'affixes respectives  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = \sqrt{3} + i$  et  $z_C = -z_B$

- 1) a- Ecrire sous formes exponentielle  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$ 
  - b- Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle  $(\zeta)$  de centre O et de rayon 2
  - c- Construire les points A, B et C
- 2) a- Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A
  - b- Calculer l'aire du triangle ABC
- 3) Soit M un point du plan d'affixe  $z_M = 2e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$  et S l'aire du triangle MBC
  - a- Vérifier que  $M \in (\zeta)$  et justifier que le triangle MBC est rectangle en M
  - b- Montrer que  $S = 2 \left| e^{2i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right|$
  - c- Vérifier que  $e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})} ( e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})} ) = e^{i2\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

d- En déduire que  $S = 4 \left| \sin \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) \right|$

4) Déterminer la valeur de  $\theta$  pour laquelle  $S$  est maximale

### EXERCICE N° 3 (4points)

1° Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f$  la fonction définie sur  $[a, a+1]$

par  $f(x) = \sqrt{x}$

a) Montrer que pour tout  $x$  de  $[a, a+1]$  on a :  $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$

b) En déduire que pour tout  $x$  de  $[a, a+1]$  on a

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (1)$$

2° Soit  $(S_n)$  la suite définie pour  $n \geq 1$  par  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}}$

a) Montrer en utilisant (1) , que  $S_n - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} - 1 \leq S_n$

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{S_n}$

3° Soit  $t_n = S_n - \sqrt{n}$

a) Montrer que  $(t_n)$  est minorée

b) Montrer que  $(t_n)$  est décroissante

c) En déduire que  $(t_n)$  est convergente

### EXERCICE N° 4 (6points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}$

1) a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  , interpréter graphiquement

b- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  , interpréter graphiquement

2) a- Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  ,  $f'(x) = \frac{x^2-1}{4x^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}}$

b- Dresser le tableau de variation de  $f$

3) Soit  $g_1$  et  $g_2$  les restrictions de  $f$  à chacun des intervalles  $]0, 1]$  et  $[1, +\infty[$

a- Montrer que  $g_1$  réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera et que  $g_2$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur un intervalle  $I$  que l'on déterminera

b- Donner l'expression de  $g_1^{-1}(x)$  et  $g_2^{-1}(x)$

4) a- Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que l'équation  $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$  admet exactement deux solutions  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  telles que  $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$

b- Calculer  $\alpha_4$  et  $\beta_4$

5) On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} \left( f(x) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que  $h$  est continue en 0

b- Déterminer le signe de  $h(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$