| *Devoir de Synthèse N°1* *Mathématiques* | *L.C.K – L.S.K* |
| --- | --- |
| | *Date : 27 / 12 /2016* |
| | *Durée : 2 Heures* |
| *Séction : 4ème Sciences expérimentales* | *Prof s: B.A et B.T* |

**Exercice N° 1:(3pts)**

La courbe $(C_f)$ représentée sur l'annexe ci-jointe **( Fig 1 )** est celle d'une fonction $f$ dérivable et décroissante sur $]0,+\infty[$. $(C_f)$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. La tangente à la courbe $(C_f)$ au point $B(2,\frac{3}{2})$ passe par le point $D(4,0)$.

Par lectures graphiques :

1) a) Déterminer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) Déterminer $f'(1)$, $f'(2)$ et $f''(2)$.

c) Vérifier que $f^{-1}$ est dérivable en $\frac{3}{2}$ et déterminer $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$.

2) a) Soit g la restriction de $f$ sur $[1,+\infty[$, montrer que g est une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

**Exercice n°2 :(5,5pts)**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{-1}{2(\sqrt{x})^3}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique $\alpha$ et que $\alpha \in ]1,2[$.

c) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$ ; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2) Soit La suite U définie sur IN par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout n de IN, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout n de IN, $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que pour tout n de IN, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout n de IN, on a : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$

d) Calculer la limite de la suite $(U_n)$.

**Exercice N °3 :(5,5pts)**

On considère les deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par :

$U_0 = 3$ ; $V_0 = 4$ ; $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$ pour tout entier naturel $n$.

1) Soit la suite $(W_n)$ définie par : $W_n = V_n - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(W_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ .

b) Exprimer $W_n$ en fonction de $n$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2\times 4^n}$ et $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{4^{n+1}}$.

b) En déduire les variations de $(U_n)$ et $(V_n)$ .

c) Démontrer que $(U_n)$ et $(V_n)$ sont deux suites adjacentes. Que peut-on déduire ?

3) On considère à présent la suite $t_n = \frac{U_n + 2\,V_n}{3}$, pour tout $\in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite $(t_n)$ est constante.

b) En déduire la limite des suites $(U_n)$ et $(V_n)$ .

**Exercice n°4 :(6pts)**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1)a) Calculer $(1 - i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)$ : $z^2 - (3+i)z + 2(1+i) = 0$ .

2) Soit l'équation : $(E_\theta)$ : $z^2 - (3+i)e^{i\theta}z + 2(1+i)e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

a) Montrer que z est une solution de $(E_\theta)$ si et seulement si $(e^{-i\theta}z)$ est une solution de $(E)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta)$ .

3) On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 2e^{i\theta}$ ; $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = ie^{i\theta}$ .

a) Donner la forme exponentielle de $b$ et $c$ .

b) Montrer que : $(OA) \perp (OC)$ .

c) Construire dans repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$ les points A , B et C pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. ( **Fig 2** )

4) a) Montrer que $OABC$ est un trapèze pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Vérifier que l'aire de trapèze $OABC$ est constante pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Bon travail**

# Feuille à rendre

**Nom et prénom :** ……………………………………………….

**Figure 1 : (Exercice n°1)**

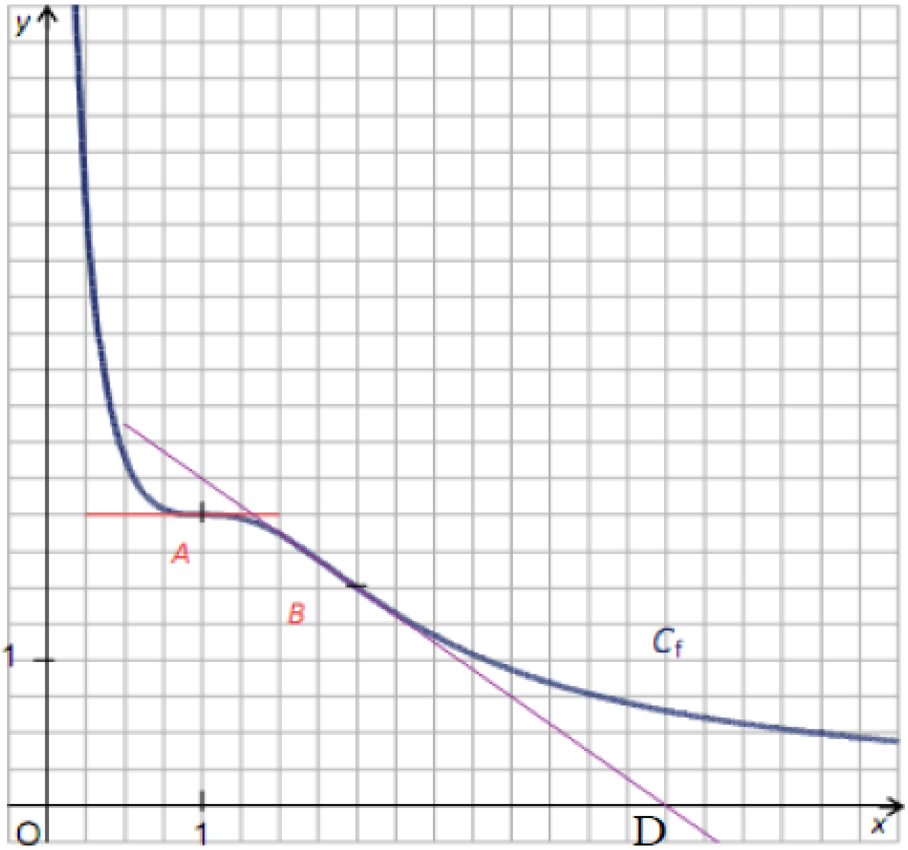


**Figure 2 : (Exercice n°4)**