

Exercice N°1 : (3 pts)

**A\*** Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $h(x) = \sin x$ ,  $(h^{-1})' \left(\frac{1}{2}\right)$  est égale à :

a.  $\sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{3}}$

b.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c.  $\sqrt{2}$

2) L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que :  $|z - 2i| = |2 - z|$  est :

a. cercle de centre  $O$  et de rayon  $2$ b. droite  $\Delta: y = 2x$ c. droite  $\Delta: y = x$ 

**B\*** Pour chacune des affirmations suivantes répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin x}{x - \sin 2x} = 3$

2) Les solutions de l'équation  $z^4 = 9\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  sont les nombres complexes :

a.  $z_k = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)}$ , ou  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Exercice N°2 : (6 pts)

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\theta) : iz^2 + e^{i2\theta}z + i(e^{i2\theta} + 1) = 0$ , ou  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Et soit

$z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation  $(E_\theta)$ .

1) a. Montrer que :  $1 + e^{i2\theta} = 2\cos\theta e^{i\theta}$ .

b. Sans calculer  $z_1$  et  $z_2$ , montrer que  $\arg\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

c. Déterminer la valeur de  $\theta$  pour que  $z_1 + z_2 = -1$ .

2) a. Calculer  $(e^{i2\theta} + 2)^2$

b. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\theta)$

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit  $A$  et  $M$  les points d'affixe respectives  $z_A = -i$  et  $z_M = i(1 + e^{i2\theta})$

a. Ecrire  $z_M$  sous forme trigonométrique.

b. Déterminer  $\theta$  pour que le triangle  $OAM$  est un triangle isocèle en  $O$ .

c. Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  quand  $\theta$  varie dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice N°3 : (5 pts)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

1) a. Dresser le tableau des variations de  $f$

b. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}_-$  et que  $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

2) On définit la suite réelle  $(u_n)$  par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ .

a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $-\frac{1}{2} \leq u_n \leq 0$ .

b. Montrer que si la suite  $(u_n)$  est convergente alors elle converge vers  $\alpha$ .

3) a. Montrer pour tout réel  $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ .

b. En utilisant le théorème d'inégalité d'accroissement fini, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4} |u_n - \alpha|$ .

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d. Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

Exercice N°4 : ( 6 pts )

Dans la feuille annexe on a représenté la courbe  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $g$  définie et dérivable sur  $[-1, +\infty[$ , une droite  $\Delta$  d'équation  $\Delta: y = x$ , la courbe  $\mathcal{C}$  admet :

\* une demi tangente à droite en  $-1$ .

\* une branche parabolique de direction  $(0, \vec{j})$  au voisinage de  $(+\infty)$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \\ f(x) = g(x) & \text{si } x \in [-1, +\infty[ \end{cases}$$

1) a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Montrer que  $f$  est continue en  $-1$ .

2) a. Vérifier que pour tout réel  $x < -1$  on a :  $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$ .

b. En déduire la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $-1$ .

c. Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $(-1)$  et interpréter le résultat géométriquement.

3) a. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et que  $f'(x) = \frac{-3}{2x^3 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$  si  $x \in ]-\infty, -1[$ .

b. Dresser le tableau des variations de  $f$ .

c. Montrer qu'il existe un réel  $c \in ]-1, 1[$  tel que :  $g'(c) = 2$ .

4) a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

b. Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et que  $(g^{-1})'(0) = 1$

c. Construire dans la feuille annexe la courbe  $\mathcal{C}'$  de  $g^{-1}$ .

*Ben Travail*

# Feuille annexe à rendre

Nom et prénom : .....

