

**Exercice n°1 : ( 3 points)**

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification

1) Soit  $f$  une fonction bijective contenant 0 et  $f(0) = 1$  alors l'équation  $f^{-1}(x) = 0$  admet :

a) une unique solution . b) aucune solution

2) Soit une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et tel que  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  alors

a)  $(f(\operatorname{tg}x))' = 1$       b)  $(f(\operatorname{tg}x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}$       c)  $(f(\operatorname{tg}x))' = \frac{\operatorname{tg}x}{1+x^2}$

3) La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$  admet un point d'inflexion au point d'abscisse : a) 0      b) 1      c) 2

**Exercice n°2 : (5,5 points)**

Soit dans  $\square$  l'équation  $(E_1) : Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$

1) Résoudre l'équation  $(E_1)$ .

2) Soit dans  $\square$  l'équation  $(E_2) : Z^3 - (1+2i\sqrt{3})Z^2 - (4-2i\sqrt{3})Z + 4 = 0$

a) Vérifier que 1 est une solution de  $(E_2)$ .

b) Résoudre dans  $\square$  l'équation  $(E_2)$ .

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B, C et K d'affixes respectives :

$$Z_A = 1+i\sqrt{3}, \quad Z_B = 2i\sqrt{3}, \quad Z_C = -1+i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad Z_K = i\sqrt{3}.$$

a) Dans l'annexe n°2 on place le point K. Construire les points A, B et C.

b) Montrer que OABC est un losange.

4) a) Ecrire  $Z_A$  et  $Z_C$  sous forme exponentielle.

b) Vérifier que  $Z_A$  est une racine cubique de  $(-8)$  et  $Z_C$  est une racine cubique de 8.

c) Montrer que  $Z_0$  est une racine cubique de 8 si et seulement si  $(-Z_0)$  est une racine cubique de  $(-8)$

d) On remarque que 2 est une racine cubique de 8, déduire de ce qui précède et sans calculs les autres racines cubiques de 8 .

**Exercice n°3 : (5 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A  $(-2, 0, 1)$ , B  $(1, 2, 1)$ , C  $(1, 1, 0)$  et D  $(1, 3, 0)$ .

1) Calculer les composantes de  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  puis déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

3) Soit H le projeté orthogonal de D sur (ABC). Calculer DH.

4) Soit E le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).

a) Calculer  $d(D, (AB))$  la distance du point D à la droite (AB).

b) Vérifier que le triangle DHE est rectangle en H puis déduire HE.

**Exercice n°4 : ( 6,5 points)**

1) Soit la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 + 1} - x$  et on note  $(C_f)$  sa courbe représentée dans l'annexe ci-joint.

a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

b) Montrer que  $f'(x) = \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f est bijective de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Expliciter  $f^{-1}(x)$ .

c) Construire dans l'annexe n°1 ci-joint la courbe de la fonction  $f^{-1}$ .

3) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $[0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  puis vérifier que  $\alpha \in ]1, 2[$

4) Vérifier pour tout  $x \in [1, +\infty[$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  puis déduire que  $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Soit la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$

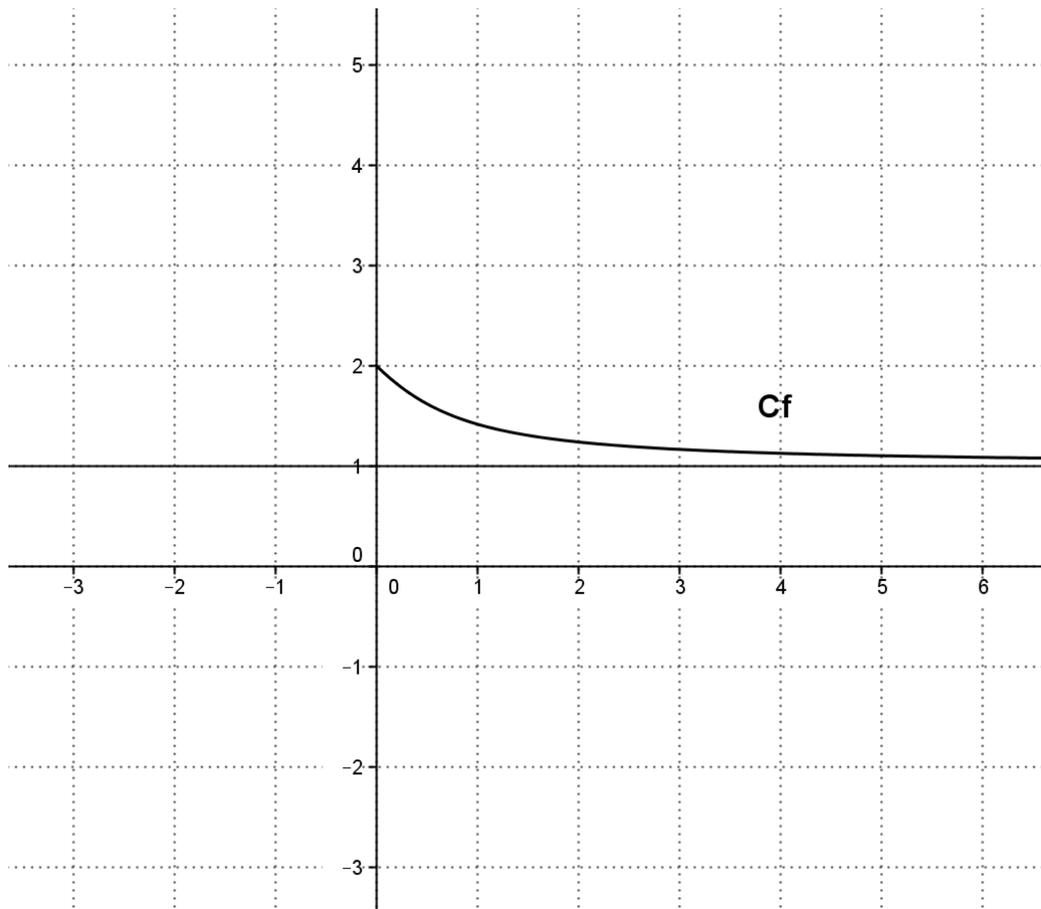
c) Dédurre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$

d) Calculer la limite de la suite  $(U_n)$

**Bon travail**

Nom et prénom :.....

Annexe n°1(Exercice n°4)



Annexe n°2(Exercice n°2)

