Lycée secondaire Zanouch Date: 11 décembre 2015 Prof: Mr.Smairy.J	**Devoir de synthèse de mathématiques n°1** Niveau: 4ème année (sciences expérimentales) Durée: 2 heures

Exercice 1: (6 points)

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

0.5 ❶ Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.75 ❷ Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

0.5 ❸ Déterminer $f([1,2])$.

0.5 ❹ Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.

0.5 ❺ Montrer que, pour tout réel $x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

B. On considère la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0.5 ❶ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $1 \leq u_n \leq 2$.

0.75 ❷ Montrer que la suite U est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

1 ❸ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

0.5 ❹ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $|u_n - \sqrt{2}| \leq (\frac{1}{2})^n$.

0.5 ❺ En déduire la limite de U.

Exercice 2: (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

0.75 ❶ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

1 ❷ Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, ona : $f'(x) = \frac{1+[f(x)]^4}{2f(x)}$

0.75 ❸ Dresser le tableau de variation de f.

1 ❹ Montrer que f est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle **I** que l'on déterminera.

❺ Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

0.5 **a)** Déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.

0.5 **b)** La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? Si oui, déterminer $(f^{-1})'_d(0)$.

1.25 **c)** Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

0.5 **d)** Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

❻ Dans l'annexe ci-jointe **(figure 1)**, on a tracé la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.75 Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère.

Exercice 3: (7 points)

1 **A.** ❶ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + iz - 1 = 0$.

❷ On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - e^{-i\theta}z + e^{-2i\theta} = 0$ où θ est un réel.

0.75 **a)** Vérifier que $e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)}$ est une solution de (E).

0.75 **b)** En déduire l'autre solution de (E).

B. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points N_1 et N_2

d'affixes respectives $\mathrm{z}_1 = e^{-i(\frac{\pi}{3}+\theta)}$ et $\mathrm{z}_2 = e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)}$.

0.75 ❶ Vérifier que $\overline{\mathrm{z}_1} = e^{2i\theta}\mathrm{z}_2$.

❷ Soit I le milieu du segment $[\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2]$ et M le point d'affixe $e^{i\theta}$.

0.5 **a)** Montrer que $\mathrm{z}_\mathrm{I} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{z}_\mathrm{M}}$

0.75 **b)** Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$.

0.75 **c)** Montrer que les droites (OI) et $(\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2)$ sont perpendiculaires.

❸ Dans l'annexe ci-jointe **(figure 2)**, on a placé un point M sur le cercle trigonométrique de centre O.

1 **a)** Construire le point I. (On laissera apparents les traces de construction).

0.75 **b)** Construire les points N_1 et N_2.

Nom et prénom:………………………………………..……………………..……Classe:……………………………

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1 (exercice 2)

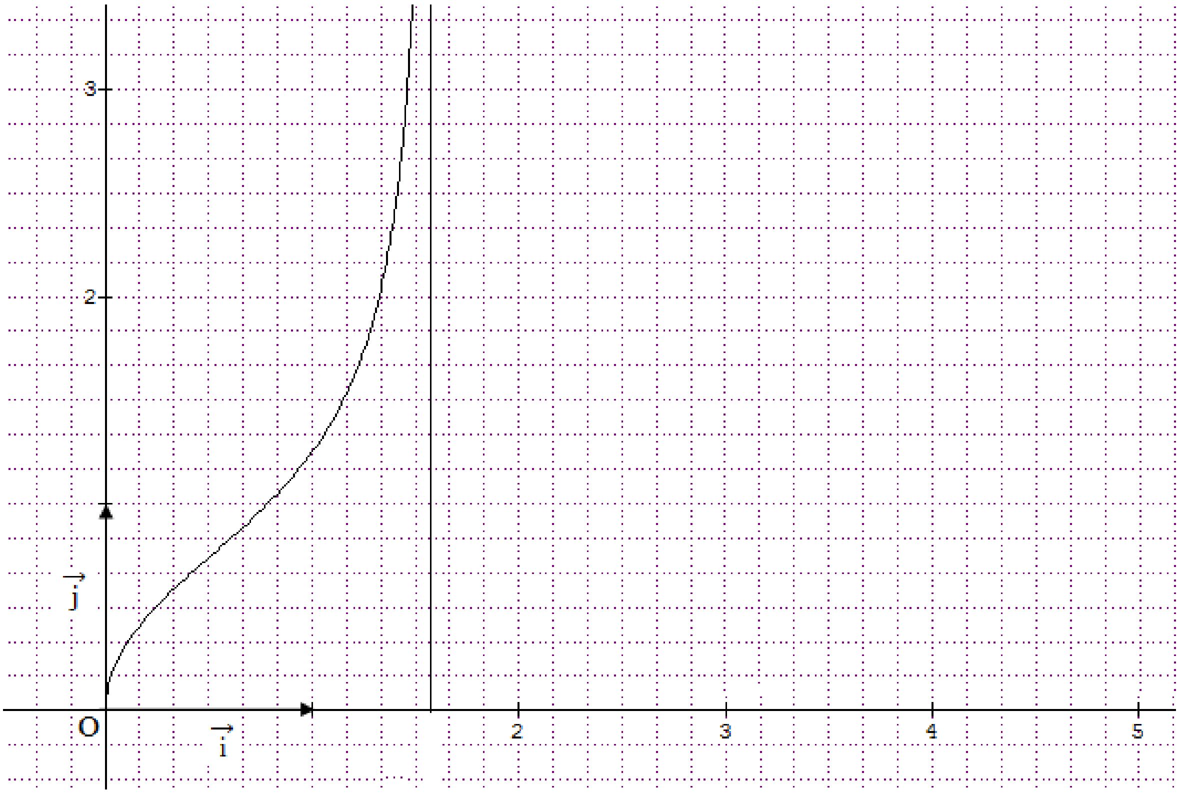

Figure 2 (exercice 3)