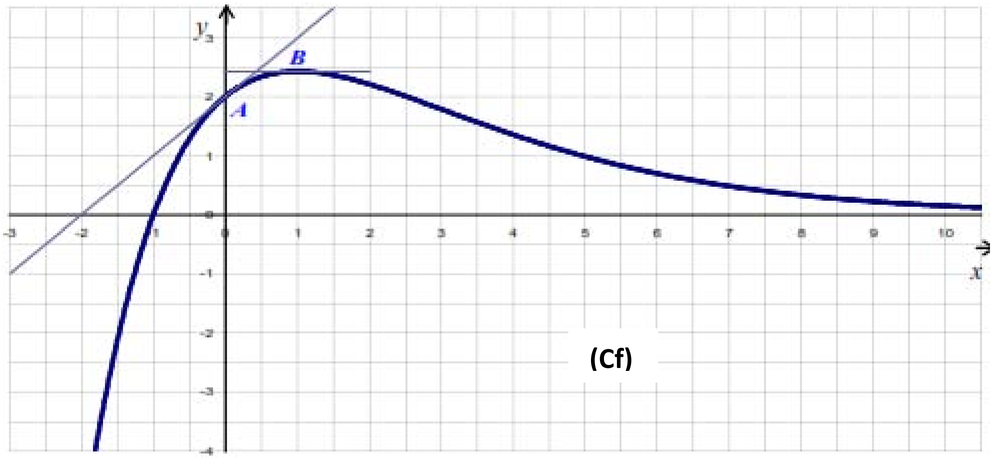
Lycée Cité El Amel Gabes Année scolaire :2014-2015

Devoir de synthèse n°1

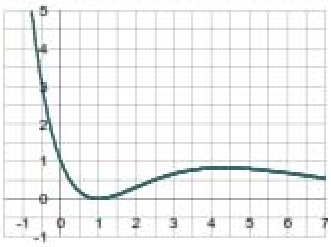
4^{eme}SC (**Durée : 120 mn**) Mrs:A-LETAIEF+J-HMIDI +S-SOLA

EXERCICE N° 1 (4 pts) La courbe **(Cf)** ci-dessous représente une fonction f dérivable sur IR .

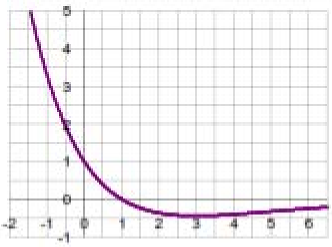
- L'axe des abscisses est une asymptote à **(Cf)** au voisinage de $+\infty$.
- **(Cf)** admet une branche infinie parabolique de direction celle de (yy') au voisinage de $-\infty$
- **(Cf)** coupe l'axe des ordonnées au point A(0 ;2) et la tangente à **(Cf)** en A passe par le point de coordonnées (-2 ;0)
- **(Cf)** admet au point B(1 ; $\frac{5}{2}$)Une tangente horizontale



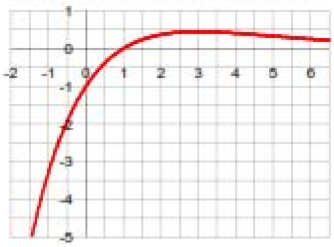
1) Par une lecture graphique :
   a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
   b) Déterminer f([0,+∞[) et f(]-∞,0])
   c) Déterminer f '(0) et f '(1)
   d) Déterminer une équation de la tangente à **(Cf)** au point A
2) Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée de f Déterminer laquelle. En justifiant la réponse



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

3) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{2X-3}{X^2-1})$ et $\lim_{x\to0} f(\frac{2}{x^2})$
4) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x)= $f(\tan x)$
   a) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   b) calculer g '(0) et g '($\frac{\pi}{4}$)

EXERCICEN°2 : (6 pts)

I) Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

1) Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $g'(x)=\dfrac{-4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$

2) Dresser le tableau de variation de g. En déduire que pour tout x $\in[0,+\infty[$, $0 \prec g(x) \leq 1$.

II) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+4-\sqrt{x^2+4})$

1) a) Montrer que pour tout x $\in[0,+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{1}{2}g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que pour tout $x \in [0,6]$ on a $f(x)\in[0,6]$

2) Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=f(U_n) \quad \forall\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0=6 \\ V_{n+1}=f(V_n) \quad \forall\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que $U_n\in[0,6]$ *et* $V_n\in[0,6]$

b) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $U_n \leq V_n$

c) Montrer par récurrence que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante

3) a) Montrer que $\forall$ t $\in$ $[0,6]$ on a: $|f'(t)|\leq\dfrac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall$ xet y deux réels de $[0,6]$ on a: $|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{1}{2}|x-y|$

c) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}$ on a: $|U_{n+1}-V_{n+1}|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-V_n|$

d) En déduire $\forall\ n\in\mathbb{N}$ on a: $|U_n-V_n|\leq 6(\dfrac{1}{2})^n$

e) Montrer que (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite que l'on déterminera

EXERCICE :N°3 (4 pts)

1) On considère les nombres complexes $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

a) Calculer $\mathbf{z_1+z_2}$ et $\mathbf{z_1z_2}$

b) En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^2-z+1=0$.

2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^6-z^3+1=0$

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'') : $z^3-(1+i)z^2+(1+i)z-i=0$.

a) Vérifier que $z_0=i$ est une solution de (E'').

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'').

EXERCICE N°4 (6 pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)

On a placé sur la feuille annexe le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - 2 - i$ et le cercle ($\mathscr{C}$)de centre 0 et de rayon 2

1) Soit M et N les points d'affixes respectives $z_M = \sqrt{3} + i$ et $z_N = \sqrt{3} - i$
   a) Donner la forme exponentielle de z_M et z_N
   b) Placer les points M et N sur la feuille annexe
2) Soit C le symétrique de A par rapport à O et les points D et E d'affixes respectives $z_D = iz_A$ et $z_E = \sqrt{3}\ z_D$
   a) Montrer que le triangle OAD est rectangle et isocèle en O puis placer le point D
   b) Donner la forme algébrique de z_E
   c) Montrer que $E \in (OD) \cap (MN)$ puis construire E
3) On pose $r = 2 - \sqrt{3}$
   a) Montrer que $1 + r^2 = 4r$ et $1 - r^2 = 2\sqrt{3}\ r$
   b) Exprimer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ en fonction de r
   c) Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AE}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
   d) En déduire la nature du triangle ACE

Annexe (feuille à rendre avec la copie)

Nom et prénom :……………………………………………………………………………….