Lycée secondaire Kesra et Lycée Chebbi Kesra *Année scolaire : 2014-2015* *4ème Sciences Expérimentales* *M^{rs} : B.Allala et B.Tmim*	**Devoir De Synthèse N°1** **Mathématiques** **Durée : 2Heures**

Q.C.M : (4 Pts)

I/ Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

On donne la courbe (C_k) (**dans l'annexe ci-jointe**) d'une fonction impaire k deux foix dérivable sur IR et strictement croissante ainsi que les tangentes à (C_k) aux poinrs d'abscisse 0 et 2 .

1) La fonction k'' ne s'annule pas sur IR.

2) $(k^{-1})'(3) = 3$.

3) La fonction k^{-1} est dérivable en 0.

4) La fonction dérivée k' est impaire .

II/ Vérifier que la fonction k est bijective puis tracer la courbe $(C_{k^{-1}})$ de la fonction k^{-1} dans le même repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice n°1 : (5,5 Pts)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1) Déterminer : $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [2;3]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

b) Expilcilter : $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]2;3[$.

5) Soit la suite (U_n) définie IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $2 \leq U_n \leq 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°2 : (5,5 Pts)

On considère les suites réelles (S_n), (U_n) et (V_n) définies sur IN* par :

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad ; \quad U_n = S_{2n} \text{ et } V_n = S_{2n+1}$$

1) Calculer U_2 et V_2.

2) Montrer que pour tout n$\in IN^*$, on a : $U_n \leq V_n$

3) a/ Montrer que : $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$, puis en déduire que (U_n) est croissante.

b/ Montrer que (U_n) est convergente vers un réel α .

c/ Montrer que : $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)}$, puis en déduire que (V_n) est décroissante.

4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. En déduire $\lim_{+\infty} V_n$.

5) a/ Montrer que la suite (S_n) est convergente vers α.

b/ Montrer que : $U_n \leq \alpha \leq V_n$.

c/ Déduire un encadrement de α d'amplitude 0,2 .

Exercice n°3 : (5 Pts)

I/ 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2 - (\sqrt{3} + i)z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

2) Donner les solutions sous forme exponentielle.

II/ Soit $\theta \in [0, \pi[$, On considére dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E') : $z^2 - (2\cos\theta + i)z + 1 + \sin\theta + i\cos\theta = 0$

1) a) Vérifier que : $(2\sin\theta + 1)^2 = -4\cos^2\theta + 4\sin\theta + 5$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E') .

2) Dans le repére orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considére les points : A , B et C d'affixes respectives : i , $e^{-i\theta}$ et $i + e^{i\theta}$

a) Déterminer θ pour que : OACB soit un parellélogramme .

b) Déterminer θ pour que : ABC soit un triangle rectangle en A .

Bon travail

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : ……………………………….. Classe : ………………… N° : …………………