Lycée Takelsa Prof :Ziadi Mourad Epreuve :Mathématiques	Devoir de Synthèse N :1	
Date : 10/12/2014	Durée :2h	Classes :4èmeSc.Exp 2

Exercice N :1(03pts)

Soit f la fonction définie sur I=$\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par f(x) $=\frac{1}{\cos x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Calculer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$.

3) Tracer la courbe (C) de f et (C') de f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1}sur J.

b) Montrer que pour tout $x>1$ on a: $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

c) Calculer alors ; $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-\sqrt{2}}$.

Exercice N :2 (05 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)z+i=0$

2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation (E): $z^2-2e^{i\theta}\cos\theta\, z+e^{2i\theta}=0$

a)Vérifier que 1 est une solution de (E) .

b) En déduire l'autre solution de E .

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,on considère les points A et B et C d'affixes respectives : 1 , $e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$.

a)Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

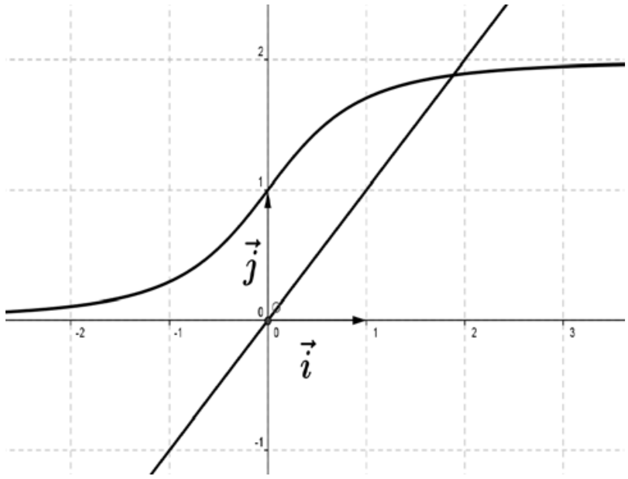
b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

c)Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire de losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice N :3 (06pts)

Dans la figure ci – contre on a représenté la courbe de la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ainsi que la droite Δ d'équation y = x



1) a) **Par une lecture graphique**, justifier que l'équation

$1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x$ admet dans ℝ une unique solution α .

b) Vérifier que 1,5 < α <2

c) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3) Soit la suite (u_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ; n \geq 0. \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

b)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$

c)En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice N :4 (06pts)

On considère la suite U définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \cos(U_n)\ \ ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)Montrer que la fonction $f: x \longmapsto x + \cos(x)$ est croissante sur ℝ.

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n).

c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3)a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos(U_k) = U_{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \cos(U_k)$.

4) Soit x un réel donné. Développer $(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^2$; puis déduire que $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos(x)+1}{2}$.

5) Pour tout n ∈ ℕ , on pose $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$.

b) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} nV_n$.