LYCEE BOUMERDES **** ***DEVOIR DE SYNTHESE N°1*** **** PROFESSEUR :***braiek Khalifa***	CLASSE : ***4ème sc.***	
	EPREUVE : ***MATHEMATIQUES***	
	Durée : 2 heures.	Date : 11/ 12 / 2014

Nom :……………….. Prénom : ……………………

EXERCICE N° 1 : (3 points).

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer la bonne réponse.

1) La forme exponentielle du nombre complexe $z = -2 - 2i$ est :
   a) $2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ b) $2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ c) $2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
2) Si z' et z'' sont les racines de l'équation $iz^2 + 5z + 3 - i\sqrt{7} = 0$ alors :
   a) $z' + z'' = 5$ b) $z' + z'' = -5i$ c) $z' + z'' = 5i$
3) La dérivée de la fonction : $f : x \mapsto x - \sqrt{1 + x^2}$ est ;
   a) $1 - 2x\sqrt{1 + x^2}$ b) $\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ c) $\frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$
4) Pour tout couple (x, y) des réels on a :
   a) $\sin x - \sin y = x - y$
   b) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
   c) $|\sin x - \sin y| \geq |x - y|$

EXERCICE N° 2 : (6 points).

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - 2(2\cos\theta + i)z^2 + 4(1 + 2i\cos\theta)z - 8i = 0$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de (E).
2) a- Montrer que (E) s'écrit $(z - 2i)(z^2 - 4\cos\theta\, z + 4) = 0$.
   b- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera $z_0 = 2i$, z_1 et z_2 les autres solutions tel que $Im(z_1) > 0$.
   c- Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.
3) On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   a- Vérifier que les points , M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle de centre O .
   b- Déterminer θ pour que AOM_2M_1 soit un losange.
   c- Pour la valeur de θ trouvée, placer les points A, M_1 et M_2.

EXERCICE N°3 : (6points).

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+8}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f.
   (On montrera que pour tout réel $x \in]-\infty, 0]$, $f'(x) = \frac{28x}{(2x^2+8)^2}$)
   b- Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]-\infty, 0]$.

a- Vérifier que $\alpha \in]-1,0[$.

b- En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$.

3) Soit f^{-1} la fonction réciproque de .

a- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $\in J$.

b- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\frac{3}{8}, \frac{1}{2}[$.

4) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a- Montrer que : pour tout $n \in$ IN ; $-1 \leq U_n \leq 0$.

b- Montrer que : $\forall x \in [-1,0]$ $|f'(x)| \leq \frac{7}{16}$

c- En déduire que $\forall n \in$ IN, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{16}|U_n - \alpha|$

d- Montrer alors que : $\forall n \in$ IN, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{7}{16})^n \left|\frac{1}{2} + \alpha\right|$

En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

.<u>EXERCICE N°4</u> : (5 points).

Le plan est muni d' un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On a représenté ci-dessous la courbe (Cf) d'une fonction f définie sur IR et sa tangente (T) au point d'abscisse 1.

1) **Par une lecture graphique** :

a) Déterminer : $\lim_{x+\infty} f(x)$, $\lim_{x-\infty} f(x)$, $\lim_{x+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x0^-} f(\frac{1}{x})$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T .

c)Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$

a)Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

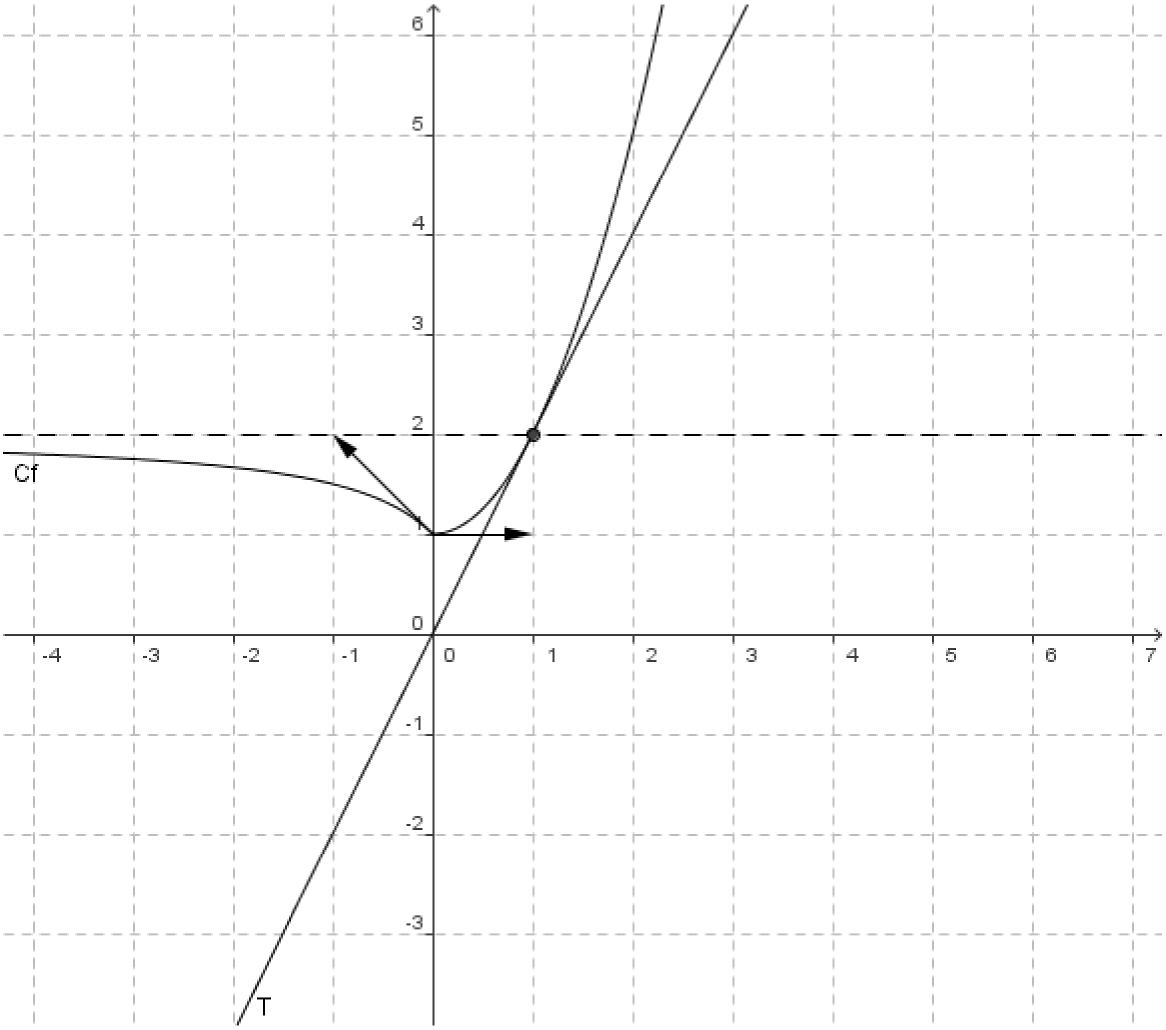
b) Construire la courbe (C') de g^{-1}.

c) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

d) Calculer$(g^{-1})'(2)$.

e) La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Expliquer.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014



Cf
T