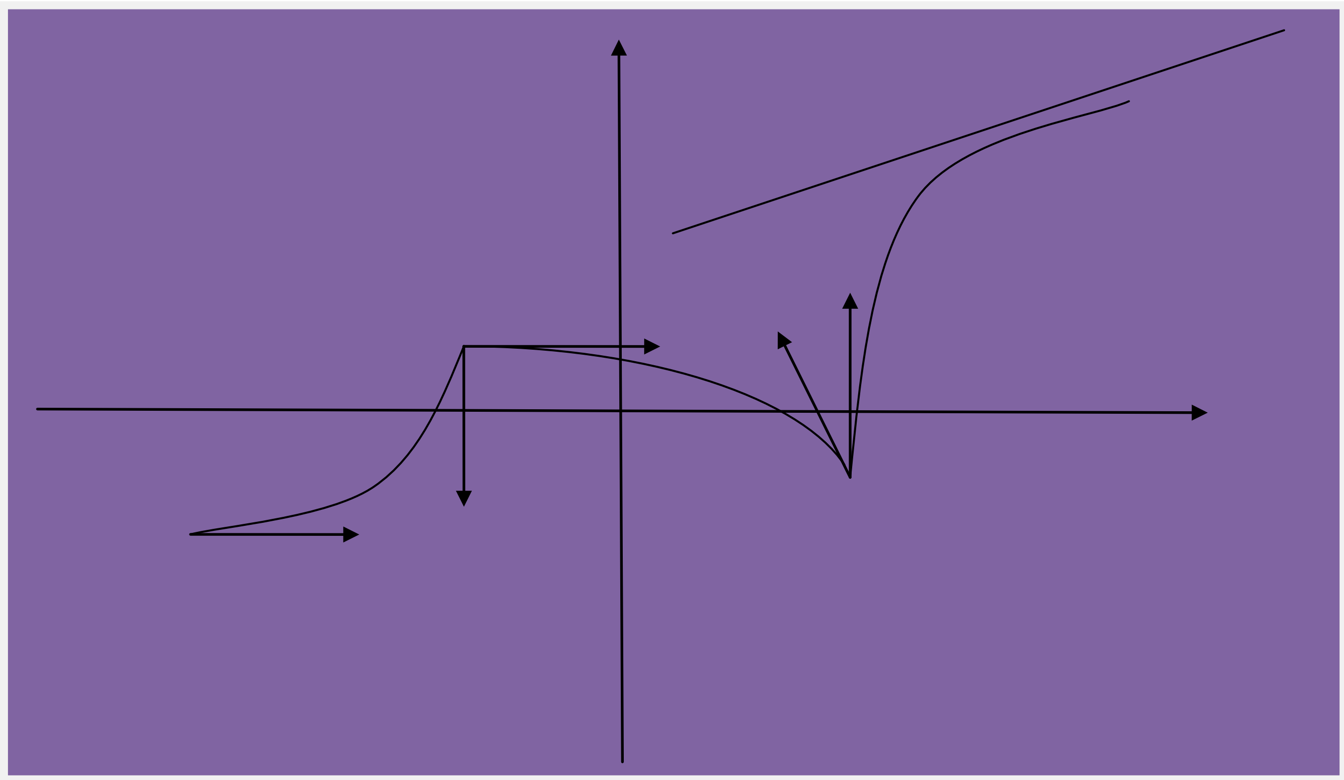
Lycée Elmnihla Ariana Prof : koruna Badreddine	Devoir de synthèse N : 1 Durée : 2H	Classe : 4sciences 1 Le : 04/12/2013

EXERCICE N°1 :(6 pts)

Soit la fonction f représentée par le graphique ci-dessous dans un repère orthonormé :



- La courbe de f admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = \frac{1}{3}x + 2$ au voisinage de $+\infty$.
- A (-5 ; -2) , B (-2 ; 1) , C (2 ; 1) et D (3 ; -1).
- La courbe de f est : $[\overset{\frown}{AB}] \cup [\overset{\frown}{BD}] \cup [\overset{\frown}{DE}[$.
- La courbe de f admet deux demi-tangentes horizontales aux points A et B.
- La courbe de f admet deux demi-tangentes verticales aux points B et D.

A) En utilisant la courbe de la fonction f , choisir sans justification la seule bonne réponse :

1) L'ensemble de définition de f est :
   a) IR b) [-5 ; +∞ [c)] -5 ; +∞ [.
2) Le domaine de dérivabilité de f est :
   a)] -5 ; +∞ [$\setminus\{-2\,;3\}$ b) [-5 ; +∞ [c) [-5 ; +∞ [$\setminus\{-2\,;3\}$
3) La fonction f est dérivable :

a) . à droite en -2 b) en -2 c) à gauche en -2

B) 1) Déterminer :

a) $f'_g(3)$

b) $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis $\lim_{+\infty} \frac{3f(x)-x}{3}$

c) $\lim_{-2^-} \frac{f(x)-1}{x+2}$

2) Dresser le tableau de variation de f .

EXERCICE N° 2 :(8 pts)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit ∝ un réel et on désigne par (E) l'équation : $z^2 - (1 + 2\cos\propto) z + 1 + \cos\propto - i\sin\propto = 0$
   a) Vérifier que : $4\cos^2\propto + 4i\sin\propto - 3 = (1 + 2i\sin\propto)^2$.
   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
2) Soient A et B deux points tels que $z_A = e^{-i\propto}$ et $z_B = 1 + e^{i\propto}$, avec $\propto \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
   a) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\propto}{2}\right) e^{i\frac{\propto}{2}}$.
   b) Déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous la forme exponentielle.
   c) Déterminer alors ∝ pour que le triangle OAB soit rectangle en O.
3) Soit le point C symétrie du point A par rapport à l'axe des abscisses.
   a) Déterminer z_C en fonction de ∝ .
   b) Vérifier que $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin\propto$
   c) Déduire l'affixe z_D du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.
   d) Déterminer ∝ pour que ACBD soit un carré.

EXERCICE N° 3 :(6 pts)

1) Soit $f(x) = \sqrt{x^2+8} - x$
   a) Montrer que la fonction f est dérivable sur IR et $\forall x \in IR$ on a $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$.
   b) Prouver que $\forall x \in [1;2]$ on a : $1 \leq f(x) \leq 2$.
   c) Prouver que $\forall x \in [1;2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

2) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que $\forall n \in IN ;\ 1 \leq u_n \leq 2$.
   b) Vérifier que : $f\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.
   c) Montrer que $\forall n \in IN$, $\left|u_{n+1} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|$
   d) Montrer que $\forall n \in IN$, $\left|u_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   e) En déduire que (u_n) est une suite convergente vers un réel L que l'on calculera.

BON TRAVAIL