

Lycée Thélèpte A.S : 2010 – 2011	Devoir de Synthèse n°1 Epreuve : Mathématiques Durée : 3 heures	Prof : M. Abderrazek Niveau : 4 ^{ème} Sc.Exp
-------------------------------------	--	--

Exercice 1 : (3 pts)

Répondre par vrai ou faux.

- 1) L'équation $z^5 = \bar{z}$ admet dans \mathbb{C} six solutions.
- 2) L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet dans \mathbb{C} deux racines opposées.
- 3) Toute fonction continue en un réel a est dérivable en a.

Exercice 2 : (6 pts)

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - z + 1 = 0$.
b) Mettre les solutions sous forme exponentielle.
c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

2) Soit θ un réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (\cos\theta)z + 1 = 0$

b) Pour tout nombre complexe z on pose

$$f(z) = z^3 - (i + \cos\theta)z^2 + (1 + 2i\cos\theta)z - i = 0.$$

i) calculer $f(i)$

ii) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, M et N d'affixes respectives i , $ie^{i\theta}$ et $i + e^{i\theta}$.

a) Montrer que OANM est un losange.

b) Déterminer les réels θ pour les quels l'aire de OANM soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que f est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Interpréter graphiquement le résultat.

d) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-x}{(1+x)^2\sqrt{1+x^2}}$.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 5; 1, 6[$

3) Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = f(\tan(x))$

a) calculer $h'(x)$.

b) Montrer que $h(x) = 1 + \cos(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 4 : (5 pts)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases} \quad n \geq 0$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$.

b) Montrer que U est croissante

c) Montrer que U diverge vers $+\infty$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n^2}{4}$

a) Montrer que $V_{n+1} - V_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $V_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la limite de (V_n)

c) Montrer que $1 \leq V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer la limite de $(V_{n+1} - V_n)$.

 Bon Travail 