Lycée Thélepte A.S : 2010 – 2011	**Devoir de Synthèse n°1** Epreuve : Mathématiques Durée : 3 heures	Prof : M. Abderrazek Niveau : 4ème Sc.Exp

Exercice 1 : (3 pts)

Répondre par vrai ou faux.

1) L'équation $z^5 = \bar{z}$ admet dans $\mathbb{C}$ six solutions.
2) L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deus racines opposées.
3) Toute fonction continue en un réel a est dérivable en a.

Exercice 2 : (6 pts)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - z + 1 = 0$.

   b) Mettre les solutions sous forme exponentielle.

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

2) Soit θ un réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (cos\theta)z + 1 = 0$

   b) Pour tout nombre complexe z on pose

   $f(z) = z^3 - (i + cos\theta)z^2 + (1 + 2icos\theta)z - i = 0.$

   i) calculer $f(i)$

   ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives i , $ie^{i\theta}$ et $i + e^{i\theta}$.

   a) Montrer que OANM est un losange.

   b) Déterminer les réels θ pour les quels l'aire de OANM soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x} \; si \; x < 0 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad si \; x \geq 0 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 .

c) Interpréter graphiquement le résultat.

d) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-x}{(1+x)^2\sqrt{1+x^2}}$.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution $\alpha \in]1,5;1,6[$

3) Soit h la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = f(tan(x))$

a) calculer $h'(x)$.

b)Montrer que $h(x) = 1 + cos(x)$ pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 4 : (5 pts)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \quad n \geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}$,$U_n \geq 1$.
   b) Montrer que U est croissante
   c) Montrer que U diverge vers +∞.
2) On pose pour tout n $\in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{{U_n}^2}{4}$
   a) Montrer que $V_{n+1} - V_n \geq 1$ pour tout n $\in \mathbb{N}$.
   b) Montrer que $V_n \geq n$ pour tout n $\in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer la limite de (V_n)
   c) Montrer que $1 \leq V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$ pour tout n $\in \mathbb{N}^*$.
   b) Déterminer la limite de $(V_{n+1} - V_n)$.

Bon Travail