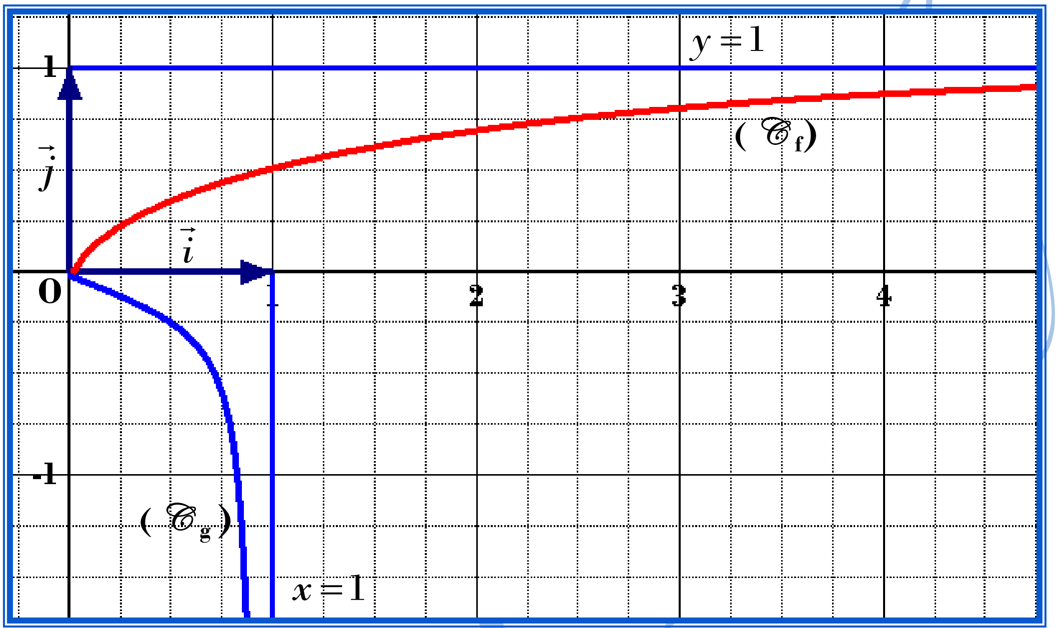
EXERCICE N° 01 (4 pts)

-I-

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous on a tracer les courbes représentatives de deux fonctions f et g



Répondre par vrai ou faux

1- a) $D_f=[0,1[$

b) $D_g=]-\infty,0]$

c) $g\circ f([0,1])=\left[-\frac{1}{4},0\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=1$

2- $g\circ f$ est décroissante sur $[0,+\infty[$

3- L'équation $g\circ f(x)=-\frac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha\in]0,1[$

-II-

1- Soit le nombre complexe $z=-2e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors :

a) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2- L'ensemble des points d'affixes le nombre complexe z tel que : $|\bar{z}+2-i| = |z-1-3i|$ est :

a) La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(-2-i)$ et $B(1+3i)$

b) La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2-i)$ et $B(1-3i)$

c) La médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(2+i)$ et $B(-1-3i)$

EXERCICE N° 02 (5 pts)

Soit $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. **(0,75 pt)**

2- a) Montrer que $\forall x<1$, on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq h(x) \leq 1$. **(0,75 pt)**

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$. **(0,5 pt)**

3- Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$. **(1 pt)**

4-a) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]-\frac{1}{2},0\right[$. **(1 pt)**

b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$. **(1 pt)**

EXERCICE N° 03 (6 pts)

Soit $\varphi(z) = z^3 - [2\cos(\theta)+i]z^2 + [1+2i\cos(\theta)]z - i \quad ; \quad \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1- a) Vérifier que i est une solution de l'équation $\varphi(z)=0$. **(1,5 pts)**

b) En déduire alors les deux autres solutions de l'équation $\varphi(z)=0$. **(1,5 pts)**

2- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(i)$, $B(e^{i\theta})$ et $C(e^{-i\theta})$

a) Déterminer le réel θ_0 pour lequel le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme. **(1,5 pts)**

b) Vérifier que le parallélogramme ainsi obtenu est un losange. **(1,5 pts)**

EXERCICE N° 04 (5 pts)

Soit $\Psi(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$; $x\in[-1,+\infty[$

1- Justifier que Ψ est croissante sur $[-1,+\infty[$. **(0,5 pt)**

2- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\Psi(u_n) \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0<u_n<u_{n+1}<1$ **(1 pt)**

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. **(0,5 pt)**

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1}-1|\le\dfrac{1}{2}|u_n-1|$. **(1 pt)**

d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_n-1|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-1|$. **(1 pt)**

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. **(1 pt)**

Bon Travail....