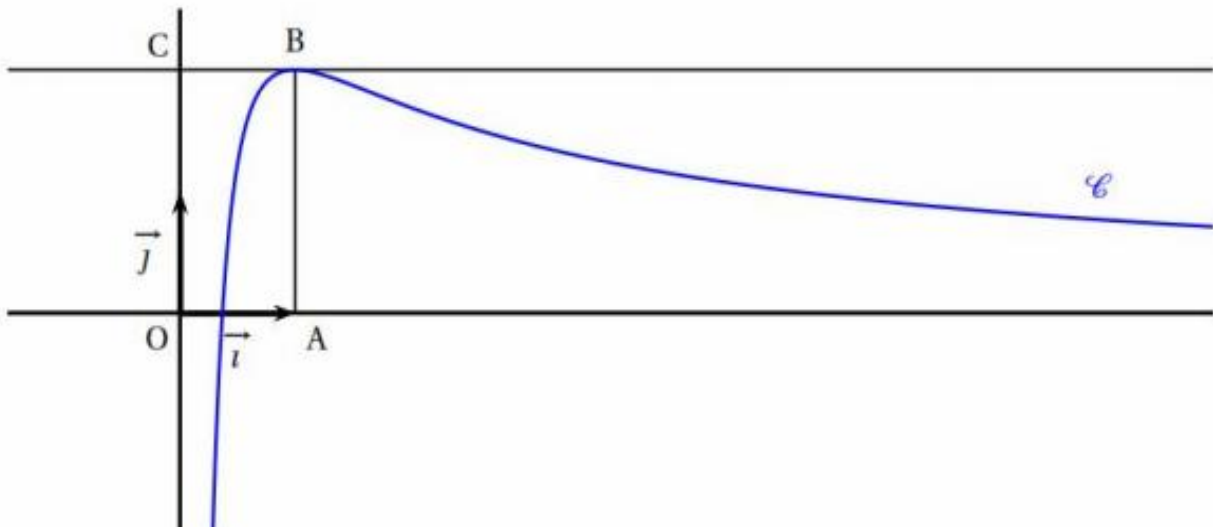


Exercice N°1 :03 pts

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(0; 2)$;
- la courbe \mathcal{C} passe par le point B et la droite (BC) est tangente à \mathcal{C} en B;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
 b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.
 c. En déduire les réels a et b .
2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
 b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.
 c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.
 b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
 Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

Exercice N°2 :03pts

Dans le plan orienté ; on considère un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Et $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ on désigne par J le projet orthogonal de A sur (BC)

1°) Soit S la similitude direct qui envoie A sur B et C sur A

- Déterminer le rapport et l'angle de S
- Montrer que le centre de S est le point J
- Déterminer et construire l'image B' du point B par S

2°) Soit D le point de la demi-droite [AC) tel que AD = AB . on rapporte le plan au repère

Direct $R = (A ; AB ; AD)$

- Déterminer les affixes des points B et C selon le repère R
- Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $S(M) = M'$
Montrer que $z' = i\sqrt{3}z + 1$
- Retrouver alors le rapport et l'angle de S et déterminer l'affixe du point J .

Exercice N°3 :04pts

1°) a) quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11

b) quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5

c) Montrer que $6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ et $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$

d) déduire que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

2°) dans cette question x et y désignent des entiers relatifs

- Montre que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution
- Montrer que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution
- Déterminer à l'aide l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E')
- Résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Montrer qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$. trouver cet entier

3°) pour tout entier naturel a ; montrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$

Alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$

Exercice N°4 :04pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit $@$ l'ensemble des Points $M(x; y)$ tel que : $4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

1°) a) Montrer que $@$ est réunion de deux parties de deux coniques (ζ_1) et (ζ_2) .

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacun des coniques (ζ_1) et (ζ_2) .

2°) Montrer que qu'en chacun des points où les coniques (ζ_1) et (ζ_2) coupent la droite (O, \vec{j}) elle ont même tangente.

3°) a) tracer les coniques (ζ_1) et (ζ_2)

b) tracer la courbe représentative de $@$.

Exercice N°5 :06pts

1°) Soit la fonction φ définie sur $]1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$.

a) Etudier les variations de la fonction sur $]1; +\infty[$.

b) Déduire le signe $\varphi(x)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2°) Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x-1)$

On note ζ_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère Orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Etudier les variations de f sur $]1; +\infty[$.

b) Montrer que le point $I(2, 0)$ est un point d'inflexion pour la courbe ζ_f .

Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ_f au point I .

c) Déterminer l'intersection de la courbe ζ_f avec la droite Δ d'équation $y = x$.

d) Construire ; la courbe ζ_f ; la droite Δ et la tangente (T)

3°) a) Montrer que f est une bijection de $]1; +\infty[$ sur \mathbb{R} .

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f

Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur \mathbb{R} . Calculer $(f^{-1})'(e+1)$.

c) Tracer dans le même repère la courbe représentative de f^{-1} .

d) Déduire le tableau de variation de f^{-1} .

4°) a) Montrer que f admet un unique primitive F qui s'annule en 2

b) Soit $g(x) = \frac{x^2 \ln(x-1)}{2}$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty [$.

c) Dédurre l'expression de $F(x)$.

