Prof	Mechmeche Imed	Devoir de synthèse N°1	Matière	Maths
Lycée	Nabheni		Date	03/01/2017
Niveau	$4^{ème}$ Maths		Durée	3 h

Exercice 1 : (6 pts)

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 2CB = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, et soient les points

I et J milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

1) On pose $f = S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$

   a) Identifier l'application $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$

   b) En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2) On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$ .Montrer que g est une symétrie glissante

3) On munit le plan du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$. Soit φ l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

   a) Montrer que φ est un antidéplacement.

   b) Déterminer l'écriture complexe de $\varphi \circ \varphi$

   c) En déduire que φ est une symétrie glissante puis déterminer son vecteur $\vec{u}$ et son axe Δ

   e) Determiner $g(A)$ et $g(D)$ puis montrer que $\varphi = g$

4) Soit $B' = g(B)$. La droite Δ coupe (BD) en P et (CB') en Q .Montrer que $g(P) = Q$

Exercice 2 : (6 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .Soit f l'application dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = iz + 1 + i$.

1) Caractériser f.

2) Donner l'écriture complexe de f^{-1}

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8$

4) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $-iz^3 - 3(1+i)z^2 - 6z - 10 + 2i = 0$

   a) Montrer que z est solution de (E) ssi z' est une racine cubique de 8

   b) Déterminer alors les solutions de (E) qu'on notera z_A , z_B et z_C

5) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|iz + 1 + i| = 2$ est le cercle circonscrit au triangle ABC tel que A , B et C sont les images des solutions de (E)

Exercice 3 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

A) 1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$ et expliciter $f^{-1}(x)$.

4) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

B) Soit h la fonction définie sur $[1,2[$ par $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ et la droite $D : x = 1$

1) Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ l'image de M par S_D . Montrer que $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases}$

2) En déduire que C_f et C_h sont symétriques par rapport à D

3) Montrer alors que $C_{f^{-1}}$ et l'image de C_h par un déplacement que l'on caractérisera.

C) Soit G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = \begin{cases} F(sin^2x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

où F est la primitive de f telle que $F(1) = \frac{\pi}{2}$

1) Montrer que G est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $G'(x) = 2cos^2(x)$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) En déduire que $G(x) = x + \frac{1}{2}\sin(2x)$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que G est continue en 0

3) Montrer que F est prolongeable par continuité à droite en 0.

4) Soit Ψ la primitive de f^{-1} qui s'annule en 0

Montrer que $F(x) = xf(x) - \Psi\big(f(x)\big) + \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in]0,1]$.