

DEVOIR DE SYNTHESE N°01

Exercice N°01 (2 pts)

On considère une fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} et on désigne par (ζ_f) sa courbe dans un repère orthonormé. Dans le graphique ci – contre, on a représenté la courbe (ζ'_f) de la fonction dérivée de f .

- La droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote à ζ'_f , en $+\infty$ et $-\infty$
- La courbe ζ'_f admet une unique tangente horizontale au point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Répond par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) La courbe (ζ_f) admet exactement deux tangentes horizontales.
- 2) Il existe une tangente à (ζ_f) de coefficient directeur $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- 3) La courbe (ζ_f) admet un point d'inflexion.
- 4) $|f(2017) - f(2016)| \leq \frac{1}{2}$

Exercice N°02 (4 pts)

I) On considère l'équation dans \mathbb{C} . (E) : $z^2 - (2a + i)z + 2a^2 + ia - a = 0$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

A tout M d'affixes a on associe les points N et Q d'affixes $z_N = (1 - i)a + i$ et $z_Q = (1 + i)a$

Et soit I le point d'affixe $\frac{1+i}{2}$

1) a) Vérifier que : $\frac{\text{Aff}(\overline{IQ})}{\text{Aff}(\overline{IN})} = i$

b) En déduire que Q est l'image de N par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) On suppose que M appartient au cercle $\zeta_{[AB]}$ de diamètre $[AB]$.

a) Vérifier que $QN = 1$

b) En déduire que lorsque M varie sur $\zeta_{[AB]}$, les points N et Q varient sur un cercle ζ' que l'on précisera.

Exercice N°03 (9 pts)

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que pour tout $x \in]2, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-8}{(\sqrt{x^2 - 4})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer ζ_f dans un repère orthonormé.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur lui-même

b) Expliciter $f \circ f(x)$ pour $x > 2$. En déduire que la droite $\Delta : y = x$ est un axe de symétrie à ζ_f

3) Soit g la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{\cos x}\right) + \frac{1}{4} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{5}{4} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche de $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

4) a) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α

5) Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = \frac{\pi}{3} \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{3} \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

c) Montrer que (U_n) est convergente et donner sa limite

6) On pose pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}g(x)$

a) Vérifier que $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sin x}$

b) Dresser le tableau de variation de h

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera

7) Soit la suite V définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h^{-1}\left(\frac{-k}{n^2}\right)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h^{-1}\left(\frac{-1}{n}\right) \leq V_n \leq h^{-1}\left(\frac{-1}{n^2}\right)$

b) En déduire que V est convergente et déterminer sa limite

Exercice N°04 (5 pts)

Soit ABCD un rectangle direct de centre O tel que $AD = 2AB$, on désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AI]$ et $[BC]$ et D' le symétrique de I par rapport au point K.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = I$ et $f(B) = D$.

b) Montrer que f est une symétrie glissante.

2) a) Montrer que $f(I) = K$

b) Donner alors la forme réduite de f .

c) Montrer que $f(K) = C$ et déterminer $f(D)$

3) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$

b) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle

c) Montrer que $g = t_{\overline{AI}} \circ R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$.

d) Soit AIEF est un carré direct de centre G, Déterminer $g \circ g(A)$ et en déduire le centre de g .

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overline{AB}, \overline{AI})$.

Soient $M(z)$ et $M'(z')$, montrer que : $M' = g(M)$ si et seulement si $z' = iz + i$

Vers la victoire finale →