L.S :02/03/34
Goubellat

Date : 06/12/2010
Classe : 4^{eme} *année*
Prof :Hamdi

Devoir de Synthèse N°1

Section : Mathématiques

Epreuve : Mathématiques

Durée :3h **Coefficient :4**

EXERCICE N° 1 (3 Pts)

I°) Indiquer la réponce exacte

1°) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que f' 0) = 0 et f ' (0) = 1 alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(\sin 2\pi x)}{x} = L$

a°) L = 0 ; b°) L = 1 ; c°) L = 2π

2°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) = x + cos x alors on a :

a°) f est décroissante sur $\mathbb{R}$; b°) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

c°) La courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$

3°) Soit f et g deux fonctions tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ g(x)$ est

a°) $+\infty$; b°) $-\infty$; c°) 0

II°) Rèpondre par Vrai ou Faux sons justification

1°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) = 1 + cos π x il existe c $\in \left]2, 4\right[$ tel que f ' (c) = 0

2°) Si la courbe répresentative de f dans un répère orthonormé admet une tangente verticale en A (- 1 , 2) alors f^{-1} n'est pas dérivable en 2

3°) Une isometrie f laisse globalement invariante une droite D si et seulement si f est une symetrie orthogonale d'axe D

EXERCICE N° 2 (4 Pts)

On considère un triangle isocèle ABC tel que AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ soit I le point du plan tel que CAI soit un triangle rectangle et isocèle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On pose K = A* I et H = B * C

R_A désigne la rotation de centre A que transforme B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle ($-\dfrac{\pi}{2}$)

On pose f = $R_C \circ R_A$

1°) a / Déterminer f (A) et f (B)

b / Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et on construira le centre O

c / Montrer que ABOC est un losange

2°) On pose g = $R_{(O\,;\,\frac{\pi}{2})} \circ S_{(AH)}$

a / Déterminer g (O)

b / Déduire la nature et les élements caractéristiques de g

3°) a / Montrer qu il existe un unique antideplacement h tel que h (A) = I et h (B) = C

b / Montrer que h est une symetrie glissante c / Déterminer l'axe Δ de h

d / Soit L le projeté orthogonale de A sur (OI) . Montrer que $L = S_{(HK)}(A)$

e / Déduire le vecteur de la symetrie glissante h

EXERCICE N° 3 (4 Pts)

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ) : $Z^2 - (1+i)e^{i\theta} Z + i e^{i2\theta} = 0$

ou θ est un nombre réel . Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{V})$

1°) On note Z ' et Z " les solutions de l'équation (E_θ)

a / Montrer que $\arg(Z') + \arg(Z'') \equiv (2\theta + \frac{\pi}{2})[2\pi]$

b / Montrer que $\left|\frac{1}{Z'} + \frac{1}{Z''}\right| = \sqrt{2}$

2°) Résoudre l'équation (E_θ)

3°) Soit M ' et M" les points d'affixesrespectives $Z' = e^{i\theta}$ et $Z'' = i e^{i\theta}$

a / Montrer que $\overrightarrow{OM'} . \overrightarrow{OM''} = 0$

b / En déduire que $M'M'' = \sqrt{2}$

4°) Soit P un point d'affixe Z_0 tel que $PM'' = \sqrt{2}$

a / Démontrer que $[PM']$ est un diametre de cercle de centre O et de rayon 1

b / Démontrer que Z_0 ; Z' et Z" sont les racines de l'équation :

$$Z^3 - i Z^2 e^{i\theta} - Z e^{2i\theta} + i e^{3i\theta} = 0$$

EXERCICE N° 4 (4 Pts)

Soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{1+x}$

1°) Tracer la courbe répresentative de f dans un répère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (unité $\|\vec{I}\| = \|\vec{J}\|$ =3cm)

2°) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases}$

a / Répresenter sur l'axe $(O, \vec{I})$ les termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3

b / Que peut on conclure sur la suite U

3°) On considère le deux suites V et W tel que $V_n = U_{2p}$ et $W_n = U_{2p+1}$

a / Montrer que la suite V est minorée par 1 et décroissante et en déduire qui elle converge vers une limite α qu l'on calculera

b / Montrer que la suite W est magorée par 1 et croissante et en déduire qui elle converge vers une limite α qu l'on calculera

c / Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite

4°) a / Résoudre l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$ on note α et β les racines de cette équation tel que $\alpha \leq 0 \leq \beta$

b / On pose la suite T définie par $T_n = \frac{U_n - \beta}{U_n - \alpha}$

a / Montrer que la suite T est une suite géometrique

b / Exprimer T_n et U_n en fonction de n et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N° 5 (6 Pts)

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Le graphique ci _joint est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{I}\,,\vec{J})$

I°)1°) Utiliser la courbe pour repondre aux qestions suivants

a / Donner les variations de f

b / Montrer que f réalise un bijection de $]0\,,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on precisera

c / Tracer la courbe de f^{-1} dans le meme repère que f

2°) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x de I

3°) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a / Montrer que l'équation f (x) = x admet une unique solution α sur $]1\,,2[$

b / Montrer que pour tout x de $[1\,,+\infty[$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

c / Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $U_n \in [1\,,2[$

d / Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$

e / Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $|U_n - \alpha| \leq (\dfrac{1}{2})^n$

f / En déduire que U est convergente et déterminer sa limite

II°)Soit h la fonction définie sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right[$ par : $\begin{cases} h(x) = f\left(\left(\dfrac{1 - \text{tg}\,x}{\text{tg}\,x}\right)^2\right) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

1°) Montrer que pour tout x de $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right[$ on a : $h(x) = \dfrac{1}{1 - \text{tg}\,x}$

2°) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera

on note φ sa fonction réciproque

3°) Montrer que φ est dérivable sur K et vérifier que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

4°) Soit ϕ la fonction définie sur $]1\,,+\infty[$ par $\begin{cases} \phi(x) = \varphi\left(\dfrac{2x-1}{2x-2}\right) & \text{si } x \succ 1 \\ \phi(1) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

a / Montrer que ϕ est continue en 1

b / Montrer que pour tout x de $]1\,,+\infty[$ on a : $\phi'(x) = -\varphi'(x)$

c / Montrer que pour tout x de $[1\,,+\infty[$ on a : $\phi(x) + \varphi(x) = \dfrac{\pi}{4}$

BONNE CHANCE