Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 1	Durée : 3 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 06-12-2010	Classe : $4M_{1,2}$

Exercice n°1 : (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On note O=B∗C , J=A∗C , K=O∗B , $\mathrm{I} = \mathrm{S}_{(BC)}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{S}_{(AC)}(\mathrm{I})$.

1) Montrer que le triangle OAB est équilatéral. Donner la nature du quadrilatère ABIO .
2) Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que R(A)=C et R(B)=O . Caractériser R .
3) a) Montrer que le point I appartient au cercle ζ circonscrit au triangle ABC .
   b) Prouver que l'image de la droite (AC) par R est la tangente à ζ en C .
4) On pose $\mathrm{f} = \mathrm{S}_{(BC)} \circ \mathrm{R}$, $\mathrm{h} = \mathrm{S}_{(BC)} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{S}_{(KJ)}$ et $\mathrm{g} = \mathrm{R}^{-1} \circ \mathrm{S}_{(BC)} \circ \mathrm{t}_{\overrightarrow{KJ}}$. Préciser f(A) et f(I) et déduire que f(C)=D .
Montrer que f est une symétrie glissante dont-on précisera l'axe et le vecteur . Caractériser h et g .

Exercice n°2 : (4 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) : $\mathrm{z}^2 - \mathrm{i}(2\sin\alpha + 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{z} - 2\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\alpha} = 0$. α étant un paramètre de $]0,\pi[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) . Mettre les solutions sous forme exponentielle .
2) Soit un repère orthonormé direct du plan et M′ et M″ d'affixes respectives $\mathrm{z}' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ et $\mathrm{z}'' = 2\mathrm{i}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$.
   a) Quel est l'ensemble des points M″ lorsque α varie dans $]0,\pi[$?
   b) Soit $W = (2\sin^2\alpha + \sin\alpha) + \mathrm{i}(\sin 2\alpha + \cos\alpha)$. Mettre W sous forme exponentielle . Déduire le milieu de [M′M″] .
   c) Calculer $\frac{z'}{z''}$. Comment sont les points M′, M″ et O ? Existe-il des valeurs de α pour que O soit le milieu de [M′M″]?

Exercice n°3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{1}{2}[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos(\pi x)}$.

1) Montrer que f est une bijection de $[0,\frac{1}{2}[$ sur $[1,+\infty[$. Soit g sa fonction réciproque .
2) Calculer $g(2)$. Etudier la dérivabilité de g sur $[1,+\infty[$ et déterminer $g'(x)$ pour $x \in\,]1,+\infty[$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,\frac{1}{2}[$ par : $f_n(x) = f(x) + x^n - 2$.
   a) Montrer que l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $]0,\frac{1}{2}[$.
   b) Montrer que $\forall x \in]0,\frac{1}{2}[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. En déduire que la suite (α_n) est convergente .

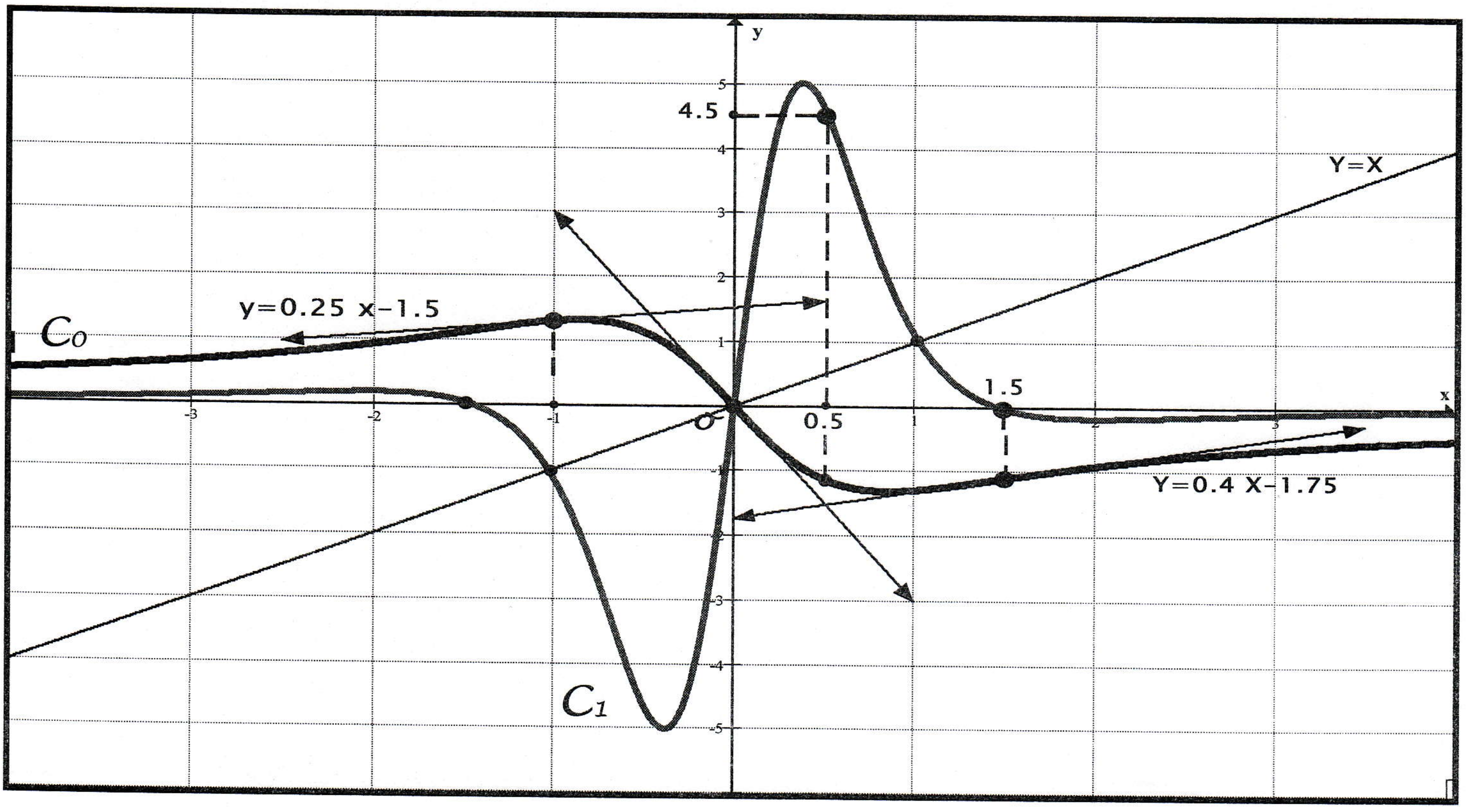
Exercice n°4 : (6 points)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Dans le ***repère 1*** de l'annexe , C_0 est la courbe d'une primitive F de f et C_1 est la courbe de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$. On admet que $\forall x \leq -1$: $f(x) < F(x)$ et que $f\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right)$.

1) a) Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{3}{2}\right)$. Etudier la parité de f puis dresser son tableau de variation .
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique $\alpha \in\,]0,1[$.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-\infty,0]$ une solution unique $\beta \in\,]-1,0[$.
   d) Montrer que $\alpha + \beta > 0$ et que $\alpha.\beta < -\frac{1}{4}$.
2) a) Montrer que la restriction de f à $[-1,0]$ admet une fonction réciproque g puis résoudre sur le graphique du ***repère 1*** : $g'(x) = -\frac{2}{9}$.
   b) Construire (C) la courbe de f et (C') la courbe de g dans le ***repère 2*** . On dessinera la tangente à (C) au point d'abscisse (-1) .
3) Soit $h(x) = f\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}\right]$ et (Γ) sa courbe dans un repère orthonormé .
   a) Montrer que h est dérivable
   b) Dresser le tableau de variatio[illegible] $2\pi, 2\pi]$.

Nom et prénom : ………………………………………………………………		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de synthèse n° 1	Durée : 3 heures
Professeur : Maâtallah	Annexe à rendre avec la copie	Classe : $4M_{1,2}$

Repère 1 :



Repère 2 :