

Exercice1

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par A et B les points d'affixes respectives : $Z_A = 2i$ et $Z_B = -i$.

A tout point M différent de A d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z}{iz+2}$

- 1) a) Déterminer la forme cartésienne de z' lorsque $z = 2+i$
b) Déterminer la forme cartésienne de z lorsque $z'=1-i$
c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que z' soit imaginaire pur.
- 2) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ on a : $(z'+i).(z-2i) = 2$ et que $BM'.AM = 2$.
b) En déduire que si M varie sur le cercle (C) de centre A et de rayon 1 alors M' varie sur un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.
c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M(z) tel que $|z'|=1$.
- 3) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + i$ où $a \in \mathbb{R}$ on désigne par θ un argument de z .

Montrer que $z' = \frac{z}{iz}$. En déduire un argument de z' en fonction de θ .

- 4 a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = (z-\sqrt{2})^2 + 2$
 - a) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
On notera : z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) avec $\text{Im}(z_1) < 0$.
 - b) Mettre z_1 sous forme trigonométrique; en déduire la forme trigonométrique de z_2
 - c) Soit C le point d'affixe : $z_c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
Montrer le triangle OAC est isocèle et que $(\vec{OC}, \vec{OA}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.
 - d) Soit I le milieu du segment [AC] et z_I son affixe.
Donner un argument de z_I ainsi que sa forme cartésienne.
En déduire les valeurs exactes $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice2

I. Soit g la fonction défini sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = x \sin x + \cos x - 1$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

II. Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 2(\frac{1-\cos x}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que f continue en 0.
 - b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
 - c) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) on point d'abscisse 0.
 - d) Etudier la parité de f.
- 1) a) Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ on a : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
 - 2) tracer (C_f) dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) (unité 3cm).

Exercice3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; on a $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$
b) Dresser le tableau de variation de f
2. a) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 que l'on précisera
b) Montre que le point I (1,0) est un centre de symétrie à la courbe (C)
c) Tracer la courbe (C).
3. Soit le point A (0,-1)
a) Montrer qu'il existe une seule tangente (T) à la courbe (C) passant par A.
b) Donner une équation cartésienne de (T) et la tracer.
4. Soit m un paramètre réel et D_m la droite d'équation $y = mx - 1$
a) Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de la courbe (C) et la droite D_m
b) Dans le cas où D_m coupe (C) en deux points M' et M'' . On désigne par J le milieu du segment $[M'M'']$. Donner les coordonnées de J puis déterminer l'ensemble des points J lorsque m varie.
5. Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$
a) Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$
b) Dresser le tableau de variation de g
c) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \right]$. Interpréter graphiquement ce résultat.
d) Tracer dans le même repère (o, \vec{i}, \vec{j}) la courbe τ de g avec une autre couleur.