Lycée Mateur	***Série de révision*** ***Primitives - Intégrales***	***Niveau : 4 Maths***
Prof : Mr Amri	***Janvier 2021***	

Exercice n°1

Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :

1) f(x) = $(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)^3$ I= IR ;

2) f(x) = $\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ I= IR ;

3) f(x) = $(x-1)\sqrt{x^2-2x+1}$ I= $]1;+\infty[$;

4) f(x)= $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$ I= $]1;+\infty[$

5) f(x)= $\dfrac{1}{(2x-1)^4}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ I = $]-\infty;-1[$;

6) f(x)= $\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^4}$ I= $]-1;+\infty[$

7) f(x) = $\sqrt{2x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ I= $]2;+\infty[$;

8) f(x) = $\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$ I= $[1;+\infty[$

9) f(x) = $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x+1}}$ I = $]1;+\infty[$;

10) f(x) = $x\sqrt{x^2+2}$ I = $[1,+\infty[$

11) f(x)= $\cos x\sin^2 x$ I= IR ;

12) f(x) = $\cos^3 x+\sin^3 x$ I = IR

13) f(x) = $\cos^4 x+2\sin^2 x$ I= IR ;

14) f(x) = (2x+1) $\sin(x^2+x+1)$ I = IR

15) f(x) = $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ I = $]0;+\infty[$;

16) f(x) = $\dfrac{1}{1-\sin x}$ I = $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

17) f(x) = $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ I = $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$;

18) f(x) = $(\sin 2x)\sqrt{1+\cos^2 x}$ I= IR

19) f(x)= $\dfrac{\sin 2x}{(2-\sin^2 x)^2}$ I = IR

20) f(x) = x$\sqrt{x+1}$ I = $[-1;+\infty[$

Exercice n°2

Soit U la fonction définie sur IR par U(x) = $x+\sqrt{x^2+1}$

1) Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de U(x) et de $U'(x)$
2) Déterminer alors des primitives pour chacune des fonctions

f(x) = $\dfrac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$ et g(x) = $\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})^3}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice n°3

Soit f(x) = $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, x $\in$ $[1;+\infty[$

1) Montrer que f admet des primitives sur $[1;+\infty[$
2) Soit F la primitive de f sur $[1;+\infty[$ qui s'annule en 1 et G la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par G(x) = F($\frac{1}{\cos x}$)
   a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer G′(x)
   b) En déduire que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ G(x) = tanx -x
   c) Calculer $F(\sqrt{2})$ et F(2)
3) Soit h(x) = $\frac{1}{f(x)}$, x $\in$ $]1;+\infty[$. Déterminer la primitive H de h sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{3}$

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$

1) a) Montrer que f admet une primitive unique F sur IR qui s'annule en -1
   b) On note (Cf) la courbe représentative de F dans un R.O.N $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .Déterminer la fonction dérivée de la fonction x$\longmapsto$ φ(x) = F(x) + F(-2-x).En déduire que le point I(-1,0) est un centre de symétrie de (Cf)
2) Soit G la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par G(x) = F($\frac{-x}{x+1}$)$+F(x)$
   Calculer G′(x) et déduire que G(x) = 2F(0)
3) Soit h la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par h(x) = F(tanx -1)
   a) Montrer que pour tout x $\in$ $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ h(x) =x
   b) En déduire que F(0) = $\frac{\pi}{4}$
4) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de F sur $[-1;+\infty[$
   c) Donner l'allure de la courbe (Cf)
5) a) Montrer que F est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que F^{-1} la réciproque de F est dérivable sur J puis calculer $\left(F^{-1}\right)'(\frac{\pi}{4})$

Exercice n°5

Soit f la fonction définie $[0;\pi]$ par f(x) = $\frac{1}{2+\sin x}$

On note (Cf) sa représentation graphique dans un repère orthonormée $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$ puis tracer(Cf)
2) Soit g la restriction de f à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
   a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser
   b) Prouver que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[$ ou g^{-1} est la réciproque de g
   c) Montrer que pour tout x $\in$ J $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{-3x^2+4x-1}}$
3) Calculer $\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\sqrt{-3x^2+4x-1}}dt$

Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = 1 + $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1) a) dresser le tableau de variation de f
   b) Tracer la courbe (Cf) dans un repère orthonormé
2) Soit F la primitive de f su IR qui s'annule en 0
   a) Montrer que F est impaire
   b) Montrer que pour tout $x\in\ [0;+\infty[\quad x\le F(x)\le 2x$
   c) En déduire la limite de F en +∞
   d) Dresser le tableau de variation de F
3) Soit G la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par G(x) = F(cosx)
   a) Dresser le tableau de variations de G (on admet que G(0)=2)
   b) Donner l'allure de la courbe de G sur un autre repère orthogonal

Exercice n°7

1) Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (x^2t+x+1)dx$; $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes

$\int_{\frac{-\pi}{2}}^0 (2t-1)\cos t dt$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$; $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$; $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(2x+3)^4}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x dx$

3) Soit f(x) = $\frac{t^3-3t}{(t-1)^3}$ t $\in$ IR$\backslash\{1\}$

a) Déterminer a , b et c tels que $\forall x \in$ IR$\backslash\{1\}$ f(x) = ax +b + $\frac{c}{(t-1)^2}$

b) En déduire I = $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin^3 x-3\sin x)\cos x}{(\sin x-1)^2}dx$

Exercice n°8

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+2x}dx$ ou n $\in IN$

1) Justifier l'existence de (I_n) pour tout n $\in IN$. Calculer (I_0)

2) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{1}{15}$

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Conclure

4) Montrer que $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{\sqrt{3}}{n+1}$.*En déduire* $\lim_{x\to+\infty} I_n$

5) a) Montrer que pour tout n $\in IN$ $(2n+5)I_{n+1} = 3\sqrt{3}-(n+1)I_n$

b)En déduire la valeur de I_2

Exercice n°9

Soit F la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\backslash\{0\}$ par F(x) = $\int_0^{\tan^2 x} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt$

1) a) Justifier l'existence de F sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\backslash\{0\}$ Et montrer que F est paire

b) Calculer F($\frac{\pi}{4}$)

2) a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et calculer* F'(x)

b) En déduire que F(x) = 2x - $\frac{\pi}{2}$ pour tour x $\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

c) Expliciter F(x) pour x $\in \left]\frac{-\pi}{2};0\right[$

3) Soit les intégrales $I=\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt$ et J $=\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt$

a)Calculer I

b) A l'aide d'une intégration par partie calculer J

Exercice n°10

Soit F la fonction définie sur IR par F(x) = $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}dt$

1) a) Montrer que F est dérivable sur IR et calculer F'(x)

b) Montrer que F est impaire

2) a) En écrivant F(x) = F(1) + $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}dt$,montrer que pour tout x>1 on a F(x) ≤2

3) Soit U la suite réelle définie sur IN par U(n) = F(n)

a) Montrer que la suite U est convergente

b) Soit x un réel et n =E(x) (partie entière de x). Montrer que $U_n \le F(x) \le U_{n+1}$

c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ est finie

Exercice n°11

Soit $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x(1-x)}dx$; n $\in IN$

1) Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par f(x) = $\sqrt{x(1-x)}$

a) Montrer que la courbe Cf de f dans un R.O.N est un demi cercle de rayon $\frac{1}{2}$ dont on précisera le centre

b) En déduire que $I_0=\frac{\pi}{8}$

2) a)Montrer que $\forall$ n $\in$ IN : $I_n=\frac{2n+1}{3}(I_{n+1}-I_n)$

b) En déduire que pour tout n $n\in IN^*$ on a $I_n=\frac{2n+1}{2n+4}I_{n+1}$

c) Montrer que $\forall$ n $\in IN^*$ on a $I_n=\frac{3\times5\times7\times.................\times(2n+1)}{6\times8\times10\times.................\times(2n+4)}\times\frac{\pi}{8}$

d) En déduire que $\forall$ n $\in$ IN* on a $I_n=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}\pi$

3) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante b) Vérifier que $I_n\le\frac{1}{n+1}$ en déduire $\lim_{x\to+\infty} I_n$