

Exercice 1

- 1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on note A, B et I les pts d'affixes $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$
- Mettre z_A et z_B sous forme exponentielle
 - Vérifier que A et B sont 2 pts du cercle (C) de centre O et de rayon 2
 - Vérifier que I est le milieu de [AB]
 - Construire le cercle (C) ainsi que les pts A, B et I
- 2)a. Justifier que la demi-droite [OI] est la bissectrice de l'angle \widehat{AOB}
- Vérifier que $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
 - Montrer que $(\vec{u}, \vec{OI}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$
- d. En déduire que $z_I = \sqrt{2 + \sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- 3) Donner alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note A, B et C les pts d'affixes :

$$a = 1 + i\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad c = a + b$$

- Donner l'écriture exponentielle de a, b et $\frac{a}{b}$
- Placer les pts A, B et C
- Montrer que OAB est rectangle et isocèle en O
- Montrer que OACB est un carré
- Vérifier que $(a+b)e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 + 2i$.
En déduire l'écriture exponentielle de c et la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$

Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note A et B les pts d'affixes :

$$a = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad b = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$$

- Montrer que les pts O, A et B ne sont pas alignés
 - Déterminer l'affixe g du pt G centre de gravité du triangle OAB
 - Donner l'écriture exponentielle de a
- Sot C le pt du plan tel que $OA = OC$ et $(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
 - Montrer que $|c| = 2$ et $\arg(c) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ où c est l'affixe du pt C
 - En déduire que $c = 1 + i\sqrt{3}$
- Montrer que OABC est un losange
 - OABC est-il un carré ?

Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

1) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}-3i$ et $c = 2i$

- Ecrire b sous forme exponentielle
- Placer les points A, B et C

2) Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ et $f = -\sqrt{3}-i$

- Montrer que les points A, E et C d'une part et les points A, F et B d'autre part sont alignés
- Montrer que $\frac{e-c}{e-b} = \frac{\sqrt{3}}{9}i$
- Interpréter géométriquement ce résultat

3) a. Montrer que BCF est un triangle rectangle en F
b. Construire E et F

Exercice 5

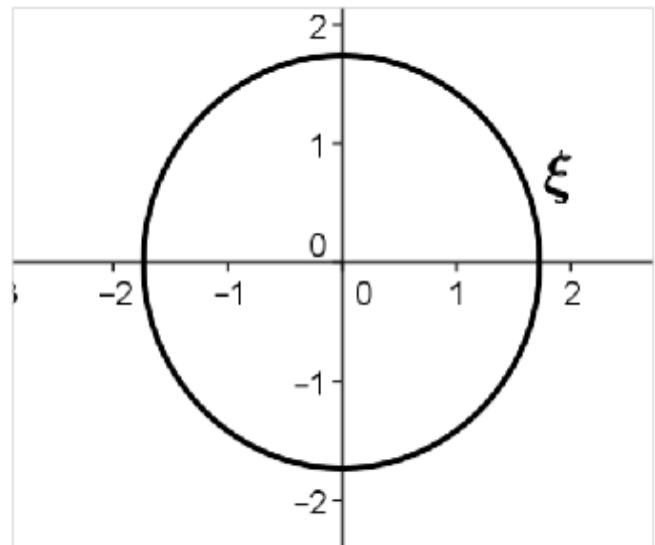
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par ξ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ (voir annexe figure 1)

1) Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$

- Montrer que A appartient à ξ
- Placer le point A

2) On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes $z_1 = \sqrt{3}[-1 + i(1 - \sqrt{2})]$ et $z_2 = \sqrt{3}[1 + i(1 + \sqrt{2})]$

- Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1 M_2]$
- Montrer que $\frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$. En déduire que $(M_1 M_2)$ et (OA) sont parallèles
- Montrer que $M_1 M_2 = 6$
- Placer le point K et construire les points M_1 et M_2



Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) a. Montrer que $\frac{1 + \cos(\pi x)}{x-1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1

b. Montrer que f est continue en 1

c. Encadrer f(x) pour $x > 1$ puis déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$

2) a. Montrer que f est strictement croissante sur $I =]-\infty, 1]$

b. En déduire f(I)

c. Montrer que l'équation $f(x) + x^2 = 0$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α et que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$