Exercice N°1

On considère la suite de terme général $F_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})\ldots\ldots\ldots(1+\frac{n}{n^2})$ avec n1

1-Vérifier que $F_n>0$ pour tout n1. Dans la suite on pose $P_n=\ln(F_n)$

2- Soit $Q=\int at^2+bt+c\,dt$

a-Déterminer les réels a, b et c pour que Q=k²

b-Déduire alors $S_n=\sum_1^n k^2$

3-a-Démontrer que pour tout x>0 : $x-\frac{x^2}{2}\le ln(1+x)\le x$

b-En déduire $\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$

4-Montrer alors que P_n et F_n sont convergentes et déterminer leurs limites

Exercice N°2

Soit f une fonction numérique continue sur $(0,1)$ et dérivable sur $(0,1)$ On suppose que :

$$f(0)=1 \quad \text{et } f'(x)=\frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

1-a-On pose pour tout x∈ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ g(x)=f(cos x)

Montrer que g est dérivable sur $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ et déterminer sa dérivé

b- Montrer alors que que g(x)=$\frac{2}{\pi}x$ puis calculer f(1)

c-Montrer que g réalise une bijection de $(0,1)$ sur $(0,1)$ puis calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x $\epsilon(0,1)$

2- On pose pour tout x ∈ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ h(x)=f(cos x) + f(sin x)

a- Calculer h'(x) pour tout x ∈ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

b- En déduire que h(x) = k où k est une constante à déterminer

Exercice N°3

On considère l'équation (E) : 25x-49y=5 ; où x et y sont des entiers relatifs

1-a- Déterminer le PGCD de 49 et 25à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.

b-Déterminer une solution particulière de (E) puis achever sa résolution.

c-Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que 25p5(49).

2-a-Justifier que si (x,y) est une solution de (E) alos 5x1$(7) et\ y \equiv 0(5)$.

b-Monter que 5x1$(7) si\ et\ seulement\ si\ x \equiv 3(7)$.

3-a-Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par 7 ?

b-Existe-t-il un couple (x,y) d'entiers relatifs tel que (x^2,y^2) soit solution de (E).

Exercice N°4

1-a- Résoudre l'équation différentielle (E) : y''-6y'+8y=0

c- Déterminer la solution y_0 de (E) dont la courbe passe par le point A(0,-1) et admet en ce point une tangente horizontale

2- Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=e^{4x}-2e^{2x}$ et **C**sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Dresser le tableau de variation de f.

3- Soit g la restriction de f sur l'intervalle I=$(-\infty, 0)$.

a- Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Calculer et interpréter $\lim_{x\to-1} \frac{g^{-1}(x)}{x+1}$ où g^{-1} désigne la réciproque de g.

c- Soit **C'** la courbe de g^{-1} . Montrer que **C** et**C'** se coupent en un unique point B d'abscisse α tel que $-0.6 < \alpha < -0.5$.

d- Tracer dans un même repère les courbes **C** et**C'** .

e- Donner l'expression de $g^{-1}(x)$

4- Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes **C** , **C'** et les axes de coordonnées

a- Montrer que S=$2\int(x - f(x)dx$.

b- Calculer la valeur de S en fonction de α et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.