LYCEE EL FAOUAR-KEBELI	**DEVOIR DE CONTROLE N°1**
Niveau : 4ème année	**Durée : 2 Heures**
Section : Sciences Informatiques	**Année scolaire : 2016/2017**
Epreuve : Mathématiques	**Professeur : El Fekih Nader**

Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4

EXERCICE 1 (4 points)

Les deux parties **A** et **B** sont indépendantes :

A- Soient a et b deux entiers relatifs et **n** un entier naturel **non nul**,

1- Rappeler la définition de : « **a** congru à **b** modulo **n** ».

2- Démontrer la propriété du cours suivante : Pour tout entier relatif **c**, si **a ≡ b [n]** alors **ac ≡ bc [n]**.

3- Démontrer la propriété du cours suivante : Pour tous entiers relatifs **c** et **d**, si **a ≡ b [n]** et **c ≡ d [n]** alors **ac ≡ bd [n]**.

B- Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie **(V)** ou fausse **(F)**.

Dans toute les affirmations suivantes, **a**, **b**, **c** et **n** désignent des entiers naturels **non nuls**.

1- Si a divise b et si a divise c alors a^2 divise bc.	
2- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+(-1)^n\right)=+\infty$	
3- Si a ≡ b [n] alors b est le reste de la division euclidienne de a par n.	
4- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)=-\infty$	
5- Si (u_n) et (v_n) convergent alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.	
6- Si (a – b) est divisible par n alors a ≡ b [n].	
7- Si ac ≡ bc [n] alors a ≡ b [n].	
8- L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation : 12x − 5y = 3 est l'ensemble des couples (4 + 10k ; 9 + 24k) où k ∈ ℤ.	
9- Pour tout n, le nombre $2^{2n}+2$ est divisible par 3.	
10- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2$	

EXERCICE 2 (6 points)

Soit $\mathbf{I}$ l'intervalle **[0 ; 1]**. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{I}$ par : $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{x+4}}$ et C_f sa courbe représentative donnée en annexe de la **page 4/4**.

1- Etudier les variations de **f** et en déduire que, pour tout **x** élément de $\mathbf{I}$, **f(x)** appartient à $\mathbf{I}$.

2- On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n) = \frac{3U_n+2}{U_n+4}$

Montrer que, pour tout n, U_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (U_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode :

3- a- En utilisant le graphique de la page annexe, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives U_0, U_1, U_2 et U_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (U_n) et sa convergence ?

b- Etablir la relation :

$U_{n+1} - U_n = \frac{(1-U_n)(U_n+2)}{U_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (U_n).

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente.

d- Prouver que la limite ℓ de la suite (U_n) vérifie $\ell = f(\ell)$ et calculer ℓ.

Deuxième méthode :

4- On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$

a- Prouver que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b- Calculer V_0 et exprimer V_n en fonction de n.

c- Exprimer U_n en fonction de V_n, puis en fonction de n.

d- Retrouver la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 3 (5 points)

Les deux parties **A** et **B** sont indépendantes :

A- Démontrer les congruences suivantes :

a- $35^{228} + 84^{501} \equiv 0[17]$.

b- $2\times35^{2002} - 3\times84^{2003} \equiv 5[17]$.

B- 1- On considère x et y des entiers **relatifs** et l'équation :

$$(E) : 91x + 10y = 1$$

a- Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation **(E)**.

b- Déterminer une solution particulière de **(E)** et en déduire une solution particulière de l'équation :

$$(E') : 91x + 10y = 412$$

c- Résoudre **(E')**.

2- Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est **un entier naturel non nul**, sont divisibles par 8.

3- On considère l'équation **(E'')** :

$$A_3\,x + A_2\,y = 3296$$

a- Déterminer les couples d'entiers **relatifs (x, y)** solutions de l'équation **(E'')**.

b- Montrer que **(E'')** admet pour solution un couple unique **d'entiers naturels**. Le déterminer.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par : $U_0 = 14$, $U_{n+1} = 5U_n - 6$ pour tout entier naturel **n**.

1- Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de U_n ?

2- Montrer que, pour tout entier naturel **n**, $U_{n+2} \equiv U_n[4]$. En déduire que pour tout entier naturel **k**, $U_{2k} \equiv 2[4]$ et $U_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3- a- Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel **n**, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

b- En déduire que, pour tout entier naturel **n**, $2U_n \equiv 28[100]$.

4- Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de **n**.

5- Montrer que le **PGCD** de deux termes consécutifs de la suite (U_n) est constant. Préciser sa valeur.

☺ ☺ ☺ *BON TRAVAIL* ☺ ☺ ☺

Nom et prénom : ………………………………………………………………………..

Page annexe à remplir et à remettre avec la copie

EXERCICE 1

1- Si a divise b et si a divise c alors a^2 divise bc.	
2- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+(-1)^n\right)=+\infty$	
3- Si a ≡ b [n] alors b est le reste de la division euclidienne de a par n.	
4- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)=-\infty$	
5- Si (u_n) et (v_n) convergent alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.	
6- Si (a – b) est divisible par n alors a ≡ b [n].	
7- Si ac ≡ bc [n] alors a ≡ b [n].	
8- L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation : 12x − 5y = 3 est l'ensemble des couples (4 + 10k ; 9 + 24k) où k ∈ℤ.	
9- Pour tout n, le nombre $2^{2n}+2$ est divisible par 3.	
10- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2$	

EXERCICE 2