Série N°09

Exercice n° 1 :

On définit dans IR la fonction f par : $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit (Un) la suite définie par la donnée de $U_0 > 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in IN$.

1) Démontrer que pour tout , de IN, $u_n > 1$
2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.
3) a/ Démontrer que pour x de [1, +∞[; $0 < f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (on pourra étudier les variations de f' sur [1, +∞[)

   b/ Déduire pour n de IN, on a : $-1+u_{n+1}+ < \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+u_n)$. Retrouver $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice n°2 :

Soit la fonction $f : x \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & si\ x > 1 \\ x^2 - x + \pi & si\ x \leq 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 1.
2) a/ Montrer que : ∀x> 1 , on a : f(x) ≥ $\sqrt{x^2-1} + \pi x$

   b/ Déduire $\lim_{n\to+\infty} f(x)$
3) a/ Justifier la dérivabilité de f sur] 1 ; +∞[

   b/ Prouver que : ∀x > 1 , on a : f' (x) > 0
4) Montrer que $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5) Dresser le tableau de variation de f.
6) L'équation f(x)=0 possède –t-elle des solutions dans IR.
7) Soit la fonction h : [0,π] → IR ; x→ h(x)=(3+sin x).

   a/ Justifier la dérivabilité de h sur [0,π] et calculer h'(x).

   b/ Dresser le tableau de variation de h.

www.devoirat.net 2019

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur]0 , +∞[par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} & si\ x \in]0,2] \\ x - \frac{4}{x} & si\ x \in]2,+\infty[\end{cases}$

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.du plan.

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) - x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) a/ Montrer que f est continue en 2.
   b/ Etudier la dérivabilité en 2.
3) a/ Montrer que pour tout x∈]0,2[, $f'(x) = \frac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
   b/ Calculer $f'(x)$ pour x∈]2,+∞[.
   c/ Dresser le tableau de variation de f sur]0 , +∞[
   d/ Tracer (ζ) (On précisera les demi tangentes au point d'abscisse 2).

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur]-1,1[par $f(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. (on prendra 2cm comme unité graphique).

1) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Montrer que pour tout réel x de]-1,1[, $f'(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. ; puis dresser le tableau de variation de f.
3) a/ Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_f) au point d'abscisse O.
   b/ Tracer (C_f) et Δ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
4) a/ Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]-1,1[une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$
   b/ Montrer que pour tout réel x de $\left[0,\frac{1}{2}\right], on\ a : |f'(x)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$
   c/ En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{1}{2}\right], on\ a : |f(x) - \alpha| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} |x - \alpha|$

www.devoirat.net 2019