Année Scolaire : 2019-2020
Classes : 4éme Science

Prof : FehriBechir
Durée : 2 heures

Séries Complexe N°2

Exercice N°1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A , B,D, M et M' sont les points d'affixes respectives : i , 2 , -i , z (différent de 2) et $z'=\dfrac{z-i}{iz-2i}$

1/a) Montrer que $|iz-2i|=BM$

b) Déduire que $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de [AB]

2/a) Montrer que $(z'+i)(iz-2i)=2-i$

b) Déduire que $M'D.BM=\sqrt{5}$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle $\zeta_{(B;2)}$

Exercice N°2:

On donne dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A,B et C

d'affixes respectives $Z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $Z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $Z=Z_1+Z_2$

1/a) Ecrire sous forme exponentielle Z_1 et Z_2

b) Placer les points A , B et C

c) Vérifier que OACB est un carré

2/ a) Montrer que $Z=(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Déterminer la forme trigonométrique de Z

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{5\pi}{12})$ et de $\sin(\dfrac{5\pi}{12})$

Exercice N°3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A , B,D, M et M' sont les points d'affixes respectives : i , 2 , -i , z (différent de 2) et $z' = \dfrac{z-i}{iz-2i}$

1/a) Montrer que $|iz-2i| = BM$

b) Déduire que $|z'| = \dfrac{AM}{BM}$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de [AB]

2/a) Montrer que $(z'+i)(iz-2i) = 2-i$

b) Déduire que $M'D.BM = \sqrt{5}$

c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie sur le cercle $\zeta_{(B;2)}$

Exercice n°4 :

1/ *Vérifier que* $(2+i)^3 = 2+11i$

2/ *Trouver les racine* 3ème *de* 1

3/a) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^3 = 2+11i$

b)*Donner la forme algébrique de solutions*

Exercice N°5 :

1/a) Vérifierque $\left(\sqrt{3}-3i\right)^2 = -6-6\sqrt{3}\,i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \left(\sqrt{3}+i\right)z + 2 + 2\sqrt{3}\,i = 0$

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 2i et $\sqrt{3}-i$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes 2i et $\sqrt{3}-i$.

b) Placer, dans le plan P les points A et B

c) Soit C le point du plan tel que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$. Déterminer l'affixe du point C

d) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A.

e) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

Exercice N°6 :

On pose $z_1 = i + 1$; $z_2 = 2i + 2\sqrt{3}$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1/ Mettre sous formes trigonométrique puis exponentielle les complexes z_1 et z_2
2/ Ecrire sous formes trigonométrique et algébrique le complexe Z

3/ En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

4/a- Déterminer la forme exponentielle de Z^6
 b- Déduire la forme algébrique de Z^6

Exercice 7 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - (\sqrt{3} + 3i)Z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

1) a) Vérifier que : $(-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
   a) Résoudre l'équation (E)
2) Pour tout Z dans$\mathbb{C}$, on pose p(Z) = $Z^3 - (\sqrt{3} + 5i)Z^2 - 4(2 - i\sqrt{3})Z + 4(\sqrt{3} + i)$
   a) Calculer p(2i)
   b) Trouver les nombres complexes α et β tel que : pour tout Z dans$\mathbb{C}$ on a
      p(Z) = (Z-2i)($Z^2 + \alpha Z + \beta$)
   c) Résoudre l'équation p(Z) = 0
3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 2i, b = $\sqrt{3} + i$ et c = $\sqrt{3} + 3i$
   a) Donner l'écriture exponentielle de a et b. En déduire la construction des points A, B et C
   b) Donner l'écriture exponentielle de c et $\frac{c-a}{b-a}$.
   c) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.
4) a) Vérifier que : b = c – a
   b) en déduire que le quadrilatère OBCA est un losange.

Exercice N°8 :

1/a) Vérifierque$\left(\sqrt{3}-3i\right)=-6-6\sqrt{3}\,i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\left(\sqrt{3}+i\right)z+2+2\sqrt{3}\,i=0$

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $2i$ et $\sqrt{3}-i$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $2i$ et $\sqrt{3}-i$.

b) Placer, dans le plan P les points A et B

c) Soit C le point du plan tel que : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$. Déterminer l'affixe du point C

d) Montrer que le point C appartient au cercle de centre O et passant par A.

e) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

Exercice N°9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A , B, M et M' sont les points d'affixes respectives : 2 , 2i , Z (différent de 2) et $Z'=\dfrac{iZ+2}{2Z-4}$

1/ On prend, dans cette question, $Z=1+i$

Donner la forme algébrique ainsi que l'écriture trigonométrique de Z'

2/a) justifier les égalités suivantes : $|2Z-4|=2MA$ et $|iZ+2|=MB$

b) Caractériser l'ensemble $E=\left\{M(Z)\text{ tel que : }|Z'|=\dfrac{1}{2}\right\}$

3/a) Montrer que pour $Z\neq 2$ et $Z\neq 2i$, on a : $\arg(Z')\equiv\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(\dfrac{Z-2i}{Z-2}\right)[2\pi]$

b) Exprimer $\arg(Z')$ à l'aide de $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$

c) Caractériser l'ensemble $F=\{M(Z)\text{ tel que : } Z'\text{ est imaginaire pur}\}$

Exercice n°10 :

Soient les nombres complexes suivants $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$, $z_2=1-i$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

1) Ecrire z_1 , z_2 et Z sous forme trigonométrie

2) Ecrire Z sous forme algébrique

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

5) a) Pour n un entier naturel non nul donner la forme trigonométrique Z^n

b) Trouver le plus petit entier n non nul pour que Z^n soit réel .

Exercice n°11 :

1°) a)Calculer $(1+2i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, 1'équation d'inconnue z suivants. $z^2 + i\sqrt{3}\,z - i = 0$.

2°) Soit θ un réel de 1'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On considère 1'équation d'inconnue z : (E_θ) $z^2 + (2i\sin\theta)z - 2i\cos\theta = 0$.

a) Vérifier que $(\cos\theta + i)^2 = -\sin^2\theta + 2i\cos\theta$.

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ).

3°) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_1 = i$, $z_2 = \cos\theta + (1-\sin\theta)i$ et $z_3 = -\cos\theta - (1+\sin\theta)i$.

a) Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b) Déterminer le réel θ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour que A, B et C soient alignés.

c) Déterminer le réel θ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O.

Quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice 12 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct :$(O; \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives i , -1 et 1

Soit l'application f du P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

tel que $z' = \frac{z+1}{z-i}$ (z un nombre complexe diffèrent de i)

1)a) Déterminer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de point C par f

b) Donner la forme exponentielle de $z_{C'}$

2)a)Déterminer l'ensembles des points M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble de point M tel que z' soit imaginaire pure

3)a) Montrer que pour tout z $\neq$ i on a : $OM' = \frac{BM}{AM}$

b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de segment $[AB]$

4)a)Montrer que $|(z'-1)(z-i)| = \sqrt{2}$

b) En déduire l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle de centre A est de rayon $\sqrt{2}$

Exercice N 13 :

1) Soit l'équation (E) : $z^2 \ - (2+3i)z - 2 + 2I = 0$
   a) Ecrire sous forme algébrique (2+i)²
   b) Résoudre alors l'équation (E)
2) Soit l'équation (E') : $z^3 - (3+2i)z^2 + 3(\,1+i)z - 2 + 2i = 0$
   a) Vérifier que (1−i) est une solution de (E')
   b) Résoudre alors l'équation (E')
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}, \vec{v}$) on considère les points A , B et C d'affixes respectives i, 1−i et 2+2i
   a) Placer les points A, B et C
   b) Calculer AB, AC et BC puis déduire la nature du triangle ABC

Exercice N 14 :

4) Soit l'équation (E) : $z^2 \ - (2+3i)z - 2 + 2I = 0$
   c) Ecrire sous forme algébrique (2+i)²
   d) Résoudre alors l'équation (E)
5) Soit l'équation (E') : $z^3 - (3+2i)z^2 + 3(\,1+i)z - 2 + 2i = 0$
   c) Vérifier que (1−i) est une solution de (E')
   d) Résoudre alors l'équation (E')
6) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}, \vec{v}$) on considère les points A , B et C d'affixes respectives i, 1−i et 2+2i
   c) Placer les points A, B et C
   d) Calculer AB, AC et BC puis déduire la nature du triangle ABC