Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - \left(2i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.

1) a) Vérifier que $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

b) Vérifier alors que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E).

c) Trouver alors l'autre solution z_2 de l'équation (E).

d) Ecrire chacun des nombres complexes z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

a) Vérifier que $z_B = iz_A$.

b) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle.

c) Construire, dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, les points A et B.

3) Soit C le point du plan d'affixe $z_C = \left(1 - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

a) Montrer que OACB est un carré.

b) Placer le point C.

c) Déterminer la forme exponentielle de z_C.

Exercise1:

Exercise2:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1) a) Vérifier que : $-7 - 4i\sqrt{2} = \left(1 - 2i\sqrt{2}\right)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + z + 2 + i\sqrt{2} = 0$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i\sqrt{2}$, $z_B = -1 + i\sqrt{2}$ et $z_C = \overline{z_A}$.

Montrer que C est un point du cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre $[AB]$.

3) A tout point M du plan d'affixe z distinct de chacun des points A et B, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z + 1 - i\sqrt{2}}{z + i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre $[AB]$.

b) Montrer que si $|z'| = 1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4) Soit E le point d'affixe $z_E = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$ et E' le point d'affixe $z_{E'} = \frac{z_E + 1 - i\sqrt{2}}{z_E + i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que $z_{E'} = -i$.

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle ($\mathscr{C}$).

Exercise3:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$(E): z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

1) a- Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2.

On désigne par B et C les points du plan d'affixes respectives $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$.

b- Mettre chacun des nombres complexes b et c sous la forme exponentielle.

c- En déduire que les points B et C appartiennent au cercle(C).

d- Construire alors les points B et C.

3) a- Montrer que $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b- En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercise4:

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + 2(\sqrt{3} - i)z - 4i\sqrt{3} = 0$.

1) a- Vérifier que : $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = 8 + 8i\sqrt{3}$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-2\sqrt{3}$ et $z_B=\sqrt{3}-3i$.

a- Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

b- Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Construire le point B dans le même repère.

3) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C=2i$ et $z_D=-\dfrac{z_B}{2}$.

a- Montrer que $\dfrac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$.

En déduire que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC)

b- Montrer que les points A, D et C sont alignés.

c- Placer le point C et construire le point D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

d- Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $6\sqrt{3}$.

Exercise5 :

1) a) Calculer $(3+i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1-3i)z-4-3i=0$.

2) Soit $P(z)=z^3-(4+3i)z^2-(9-12i)z+20+15i$.

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=1+2i$, $z_B=-2+i$, $z_C=-z_B$ et $z_D=5$.

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

4) a) Mettre sous forme cartésienne $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$.

b) Déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle.

c) Calculer la distance AC et déduire l'aire du parallélogramme ABCD.