Année Scolaire : 2019-2020

Classes : 4ème Technique

Prof : Fehri Bechir

Durée: 2 heures

Séries Complexe N°1.

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

Soit les points A,B et C d'affixe respective $a = -1 + i\sqrt{3}$; $b = -1 - i\sqrt{3}$ et $c = 2$

1/ a- Déterminer le module et l'argument de **a, b** et **c**

b- placer les points A, B et C

2/ a- Ecrire $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme algébrique et exponentielle.

b- Montrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O.

c- En déduire que les points A, B et C sont situés sur un cercle (C_1)qu'on précisera.

3/ Montrer que l'ensemble (C_2) suivant est un cercle qu'on notera **I** son centre et **r** son rayon.

$$(C_2) = \{ M(z) \in \mathbb{P} \text{ tel que } 2(z+\bar{z}) + z\bar{z} = 0 \}$$

4/ a- montrer que le point I $\in (C_1)$

b- Construire dans le même repère (C_1) et(C_2) .

Exercice n°2

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ *et* $z_2 = \sqrt{3} - i$

1. *Ecrire* z_1 *et* z_2 *sous forme exponentielle.*
2. *a- Ecrire le nombre complexe* $z_1 \times z_2$ *sous forme algébrique et trigonométrique.*

   b- En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$

3. *a- Mettre sous forme exponentielle* $\frac{z_1}{z_2}$ *puis* $1+\frac{z_1}{z_2}$

   b- En déduire la forme exponentielle de $z_1 + z_2$

Exercice 3 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A(1) et B(-i).

A tout point M, distinct de B, d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{1-z}{1-iz}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels $|z'|=1$.

2) Montrer que pour tout $z\neq -i$, on a : $z'+i=\frac{-1+i}{z+i}$.

3) a) Montrer que $BM.BM'=\sqrt{2}$.
   b) En déduire que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1
alors M'appartient à un cercle C ' que l'on déterminera.

5) On pose $z=\cos\theta+i\sin\theta$ avec $\theta\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$.

a) Ecrire z+i sous forme exponentielle.
b) En déduire la forme exponentielle de z'+i.
c) Déterminer θ pour que $|z'+i|=\sqrt{2}$.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe, on donne les points A(1) et B(-i). On considère les points M(z) et M'(z') vérifiant $z'=\frac{1-z}{1-iz}$ et $M\neq B$.

1) a) On pose $z = x + iy$.
   Montrer que : z' est réel si et seulement si $(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$
   a) En déduire l'ensemble des points M(z) tel que z' est réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'|=1$
3) a) Montrer que pour tout $z\neq$ -i on a : $z'+i=\frac{-1+i}{z+i}$
   b) En déduire $BM.BM'=\sqrt{2}$
   c) Montrer que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 5 :

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}\,i\,z - 1 = 0$

2/ θ étant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que : $((1-i)e^{i\theta})^2 = -2ie^{2i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3/ On donne les nombres complexes suivants : $a = e^{i\theta}$; $b = ie^{i\theta}$ et $c = 1+i$

a) Donner la forme exponentielle de b , c et a+b

b) Déduire les valeurs exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$. (Indication : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$)

Exercice N 6 :

1) Soit l'équation (E) : $z^2 - (2+3i)z - 2 + 2I = 0$
   a) Ecrire sous forme algébrique $(2+i)^2$
   b) Résoudre alors l'équation (E)
2) Soit l'équation (E') : $z^3 - (3+2i)z^2 + 3(1+i)z - 2 + 2i = 0$
   a) Vérifier que $(1-i)$ est une solution de (E')
   b) Résoudre alors l'équation (E')