Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp1*
Date : 05 / 03 / 2018	*Prof : Meddeb Tarak*	*Durée : 2 heures*

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ 1[$ et que $f'(x)=\dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

$b/$ Montrer que f est une bijection de $[0\ ;\ 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$c/$ Tracer C et C'. On précisera $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$d/$ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ par : $F(x)=\int_0^x\sqrt{1-t^2}\,dt$.

On pose, pour $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x)=F(\sin x)$.

$a/$ Montrer que g est dérivable sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer $g'(x)$.

$b/$ En déduire que $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$, pour tout $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

(On rappelle que : $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$).

$c/$ Montrer alors que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$, puis calculer $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx$.

3) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan limitée par C, C' et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$a/$ Montrer que $\mathcal{A}=1-\dfrac{\pi}{4}$.

$b/$ En déduire que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)\,dx=\dfrac{\pi-2}{8}$.

Exercice n°2 : *(5 pts)*

On considère les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$.

1) $a/$ Vérifier que, pour tout réel x, on a : $\cos^4 x=\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)$.

$b/$ En utilisant une intégration par parties, montrer que $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}J$.

On admet dans la suite que $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx-\frac{1}{3}I$.

2) $a/$ Montrer que $I+J=\frac{3\pi}{8}$.

$b/$ Montrer que $I-J=0$.

$c/$ Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice n°3 : *(7 pts)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1\,;\,0\,;\,0)$; $B(-1\,;\,2\,;\,0)$; $C(-1\,;\,0\,;\,2)$ et $D(1\,;\,2\,;\,2)$.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

2) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

$b/$ Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $x+y+z-1=0$.

3) Soit le point $G\left(-\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\right)$. Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.

4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

$a/$ Montrer que (DG) est l'axe de $\mathscr{C}$.

$b/$ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

5) Pour tout réel α, on désigne par S_α l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant l'équation :

$x^2+y^2+z^2+2(1-\alpha)x-2\alpha y-2\alpha z+2\alpha-3=0$.

$a/$ Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(-1+\alpha\,;\alpha\,;\alpha)$ et de rayon $R_\alpha=\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+4}$.

$b/$ Vérifier que A appartient à S_α.

$c/$ Montrer que I_α appartient à (DG).

$d/$ Déterminer l'intersection de S_α et du plan (ABC).