Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

1) L'ensemble des solutions de l'équation : lnx = -2 est

a) L'ensemble vide b) $\{\sqrt{e}\}$ c) $\{\frac{1}{e^2}\}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)-\ln x$ égal à :

a) - ∞ b) 0 c) +∞

3) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ égal à

a) $-\frac{1}{2}$ b) ln2 c) $\frac{1}{2}$

Exercice n°2 : (6 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points A(0,3,0) , B(1,1,5) et C(4,1,2).

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et déduire que A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$
   a) Montrer que S est une sphère de centre I(1,1,2) et dont on précisera son rayon.
   b) Monter que la sphère S et le plan (ABC) sont sécants suivants le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
c) Déterminer le centre H du cercle (C) et son rayon.
3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (IB).
   b) Monter que (IB) coupe la sphère S en deux points G et F dont précisera leurs coordonnés.
   c) Déterminer une équations cartésienne des plans Q et Q' perpendiculaires à (IB) et tangentes à la sphère S.

Exercice 3 (5 points)

I)Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par :$g(x)=1-2x+e^{2x}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

1) Calculer g (0)

2) En déduire le signe de g

II)On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+2+xe^{-2x}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2)a) Montrer pour tout x de , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$

b) Dresser le tableau des variations de f.

3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à f au voisinage de $+\infty$.

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

c)Montrer que $\mathscr{C}$admet une branche parabolique que l'on précisera au voisinage de $-\infty$

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x + x(lnx)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 4cm).

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = (1 + lnx)^2$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

2)a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 .

b) Etudier la position relative de (C) et T.

c) Construire T et (C).

3) Soit la suite $(I_n)_{n\geq1}$ définie par $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n dx$.

a) A l'aide dune intégration par partie Calculer I_1.

b) Montrer que pour tout n≥1 on a : $I_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2} I_n$.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations x=1, x=e et y=0. Calculer A en cm².