Proposée par Mr **Fehri Bechir**	**Série** **Fonction Réciproque**	**Année Scolaire** **2018/2019**

Exercice N°1 :

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ [$ par $f\,(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sin x}$.

1/ Montre que f réalise une bijection de $[\ \frac{\pi}{2}\ , \pi\ [$ sur $[\ 1\ ,+\infty\ [$.

2/ Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $f^{-1}(\ \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

3/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} sur $[\ 1\ ,+\infty\ [$.

4/ calculer $(f^{-1})\ (x)$, pour x $\in\ ]\ 1,+\infty\ [$.

Exercice N°2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]\ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f\,(x) = 1 - \tan x$

1/ Dresser le tableau de variation de *f* .

2/ Montrer que f réalise une bijection de $]\ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur R .

3/ Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.

4/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur R et que $(f^{-1})\ (x) = \frac{1}{-x^2+2x-2}$, pour tout réel x

5/ Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f^{-1}.

Exercice N°3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[\ 0, \frac{\pi}{2}]$ par $f\,(x) = \sqrt{\cos x}$

1/ Etudier la dérivabilité de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$ à gauche et interpréter .

2/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[\ 0, 1]$.

b) Montrer , en utilisant la première question , que la fonction f^{-1} est dérivable 0 à droite et préciser le nombre $(f^{-1})_{\ d}\ (0)$.

c/ Préciser la demi –tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 et en déduire que f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur] 0,1 [et que $(\mathrm{f}^{-1})'\ (\mathrm{x}) = \frac{-2\mathrm{x}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^4}}$ pour tout x $\in[\ 0,\ 1]$

Exercice N°4 :

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[\ 0{,}1]$ par $\mathrm{f(x)} = \cos\frac{\pi}{2}\ \mathrm{x}$

1/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. (on précisera les demi – tangentes aux points d'abscisses 0 et 1).

2/ Montrer que f réalise une bijection de $[\ 0{,}1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

3/Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[\ 0{,}1[$ et que $(f^{-1})\ (\mathrm{x}) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, pour tout x de $[\ 0{,}1[$.

La confiance en soi est le premier secret du succès (Ralph Waldo Emerson)

Exercice N°5 :

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]\ 0,1]$ par $f(x)=\frac{1}{1-\cos \pi x}$

1/ / Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2/ a) Montrer que l'équation *f (x) =x* admet une unique solution x_0 dans $]\ 0,1]$.

b) calculer $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire la valeur de x_0.

3/a) Montrer que *f* réalise une bijection de $]\ 0,1]$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) la fonction f^{-1} est – elle dérivable en $\frac{1}{2}$ à droite ?.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi x\sqrt{2x-1}}$, pour tout $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

Exercice N°6 :

A)Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1$

1/ a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1

b- Dresser le tableau de variations de f .

c- Montrer que réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera .

2/a – la fonction f^{-1} est –elle dérivable à droite en 1 ?

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$.

B) On considère la fonction g définie par

$$g(x)\begin{cases} \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)} & \text{si } x \in [\ 0, \frac{\pi}{2}\ [\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1/a Montrer que *g* est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b- vérifier que pour tout $x \in [\ 0, \frac{\pi}{2}\ ]$.

$g(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

2/ Montrer que *g* réalise une bijection de $[\ 0, \frac{\pi}{2}\ ]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

3/a- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2},1]$ et calculer$(g^{-1})'(x)$.

b- La fonction g^{-1} est –elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$?.

La confiance en soi est le premier secret du succès (Ralph Waldo Emerson)