Les intégrales

Séance 1

EXERCICE 1 :x

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x^2+\frac{2}{x^2})dx$; $\int_2^3 dt$; $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $\int_1^2 \frac{t}{(t^2+1)^2}dt$; $\int_0^1 x(3x^2+2)^4dx$;

$\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$; $\int_1^4 (x+2)\sqrt{x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,(\sin 2x)^4dx$; $\int_0^{\pi} (cosx)^3dx$;

$\int_0^{\pi} (cosx)^4dx$; $\int_0^{\pi} x.sinx.dx$ et $\int_0^{\pi} x^2 sin2x.dx$

EXERCICE 2 :x

Soit la fonction numérique F définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Montrer que F est strictement croissante sur IR.

b) Montrer que $\varphi : x \mapsto F(x) + F(-x)$ est constante sur IR. En déduire que F est impaire.

2) On pose $g(x) = \int_0^{tanx} \frac{dt}{1+t^2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

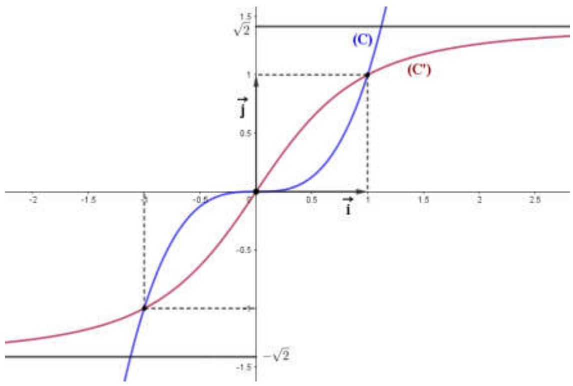
b) Calculer $g(0)$. En déduire que $g(x) = x$

c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

EXERCICE 3 :x

Soit les fonctions $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}}$

On désigne par (C) et par (C') les courbes représentatives respectivement de f et de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Voir la figure)



1) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

2) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C'), l'axe $(O,\vec{\jmath})$ et la droite d'équation $y=1$.

3) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}''$ de la partie du plan limitée par (C), (C') et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

EXERCICE 4 :x

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n+2}x\ dx$

1) a) Calculer I_0.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

2) Montrer que pour tout n, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) Calculer les termes I_2 et I_4.

EXERCICE 5 :x

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

1) Calculer I_0

2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente

b) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 6 :

1) Calculer à l'aide d'intégration par parties chacune des intégrales suivantes :

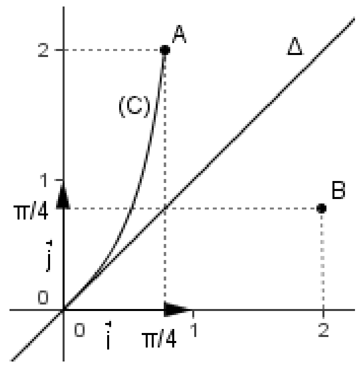
$I = \int_0^{\pi} x.sinx.dx$ et $J = \int_0^{\pi} x^2 sinx.dx$

2) Soit $K = \int_0^{\pi} \cos 2x \sin 3x\, dx$

a) Montrer à l'aide de deux intégrations par parties successives que $K = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}K$

b) En déduire la valeur de K.

EXERCICE 7 :



La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = (tanx)^3 + tanx$. La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y = x$.

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$

3) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE 8 :

Soit F la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F'(x) = 2$

2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

3) a) Calculer alors $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt$

EXERCICE 9 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a :

$u_{n+2} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}u_n$

c) Calculer alors $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ et $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$